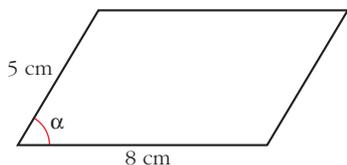


Página 133

## REFLEXIONA Y RESUELVE

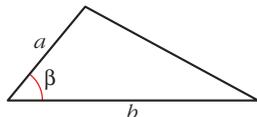
## Relaciones trigonométricas en el triángulo

- Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo  $\alpha$ :



$$\text{Área} = 8 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha = 40 \operatorname{sen} \alpha \text{ cm}^2$$

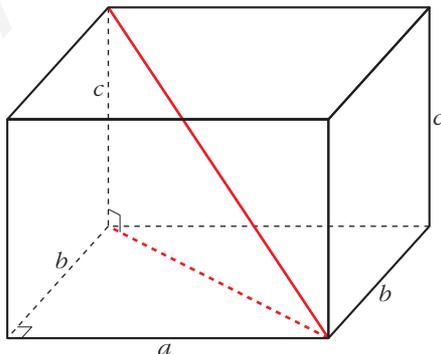
- Halla el área de este triángulo en función del ángulo  $\beta$ :



$$\text{Área triángulo} = \frac{a b \operatorname{sen} \beta}{2}$$

## Diagonal de un ortoedro

- Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son  $c = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$  y  $a = 12 \text{ cm}$ .



$$\text{Diagonal} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

- Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

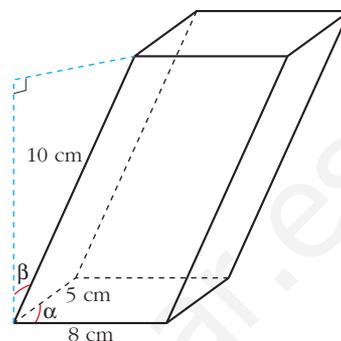
$$\text{En general: Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

## Volumen de un paralelepípedo

- Halla el volumen de este paralelepípedo en función de  $\alpha$  y de  $\beta$ :

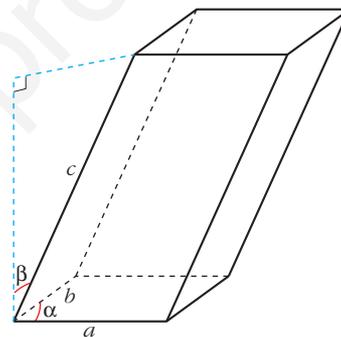
$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = 40 \operatorname{sen} \alpha \\ \text{Altura} = 10 \operatorname{cos} \beta \end{array} \right\}$$

$$\text{Volumen} = 400 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \text{ cm}^3$$



- ¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo  $\alpha$ , y las aristas laterales formen un ángulo  $\beta$  con la perpendicular?

$$\text{Volumen} = a b c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta$$



## Página 135

- La propiedad  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$  relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

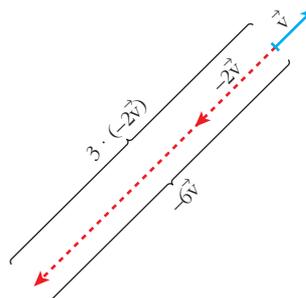
b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = -2$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:

$$b \cdot \vec{v}; (a \cdot b) \cdot \vec{v}; a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

Producto entre números:  $a \cdot b$

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



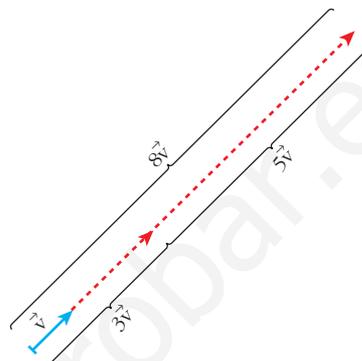
**2.** La propiedad distributiva  $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$  relaciona la suma de números con la suma de vectores.

a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = 5$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números:  $a + b$   
Suma de vectores:  $a\vec{v} + b\vec{v}$

$$b) \left. \begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



**Página 137**

**1.** Si  $\vec{u}(-3, 5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, -2)$ , halla las coordenadas:

- a)  $2\vec{u}$       b)  $0\vec{v}$       c)  $-\vec{u}$       d)  $2\vec{u} + \vec{v}$       e)  $\vec{u} - \vec{v}$       f)  $5\vec{u} - 3\vec{v}$

- a)  $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$   
 b)  $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$   
 c)  $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$   
 d)  $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$   
 e)  $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$   
 f)  $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

**2.** Sean los vectores  $\vec{x}(1, -5, 2)$ ,  $\vec{y}(3, 4, -1)$ ,  $\vec{z}(6, 3, -5)$ ,  $\vec{w}(24, -26, -6)$ . Halla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que se cumpla:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución:  $a = 6$ ,  $b = -2$ ,  $c = 4$ , es decir,  $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$ .

## Página 139

1. Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son  $\vec{u}(3, -1, 5)$ ,  $\vec{v}(4, 7, 11)$ ,  $\vec{w}(-2, k, 3)$ .

a) Calcula  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

b) Halla  $k$  para que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean perpendiculares.

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$

b) Como  $\vec{v} \neq 0$  y  $\vec{w} \neq 0$ , son perpendiculares si  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 7 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 7k + 33 = 7k + 25 = 0 \rightarrow k = -\frac{25}{7}$$

## Página 141

1. Dados los vectores  $\vec{u}(5, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(-1, 2, -2)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$       b)  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$       c)  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

d) Proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  y proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ . (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer  $x$  para que el vector  $(7, 2, x)$  sea perpendicular a  $\vec{u}$ ?

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

c)  $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0,669 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 132^\circ 1' 26''$

$$d) \text{Segmento proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-11}{3} = -3,67$$

Significa que el vector proyección de  $\vec{u}$  en la dirección de  $\vec{v}$  tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de  $\vec{v}$ .

$$\text{Vector proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{-11}{9} (-1, 2, -2)$$

$$\text{Segmento proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2,008$$

$$\text{Vector proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{-11}{30} (5, -1, 2)$$

$$e) (5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-33}{2}$$

**2. Obtén tres vectores perpendiculares a  $\vec{v}$  que no sean paralelos entre sí:**

$$\vec{v}(3, 2, 7)$$

Un vector,  $\vec{u}(x, y, z)$ , es perpendicular a  $\vec{v}(3, 2, 7)$  si:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo:  $(0, -7, 2)$ ;  $(-7, 0, 3)$ ;  $(-2, 3, 0)$

**3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:**

$$\vec{u}(5, -1, 2) \quad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector  $\vec{w}(x, y, z)$  que sea perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es  $x = -2$ ,  $y = 8$ ,  $z = 9$ .

Es decir, el vector buscado puede ser  $(-2, 8, 9)$  o cualquier otro paralelo a él.

## Página 144

**1. Halla el producto vectorial de  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y  $\vec{v}(4, 1, -2)$ .**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

**2. Halla un vector perpendicular a  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y a  $\vec{v}(4, 1, -2)$ .**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25) \text{ o cualquier vector proporcional a él.}$$

**3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores:**

$$\vec{u}(3, 7, -6) \text{ y } \vec{v}(4, 1, -2)$$

Área del paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

## Página 145

**1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por  $\vec{u}(3, -5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{w}(0, 6, 1)$ .**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \rightarrow \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

**2. Halla el valor de  $x$  para que los vectores  $\vec{u}(3, -5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{z}(1, 14, x)$  sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \rightarrow x = 0$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

## PARA PRACTICAR

## Dependencia lineal

1 Dados los vectores  $\vec{u}(3, 3, 2)$ ,  $\vec{v}(5, -2, 1)$ ,  $\vec{w}(1, -1, 0)$ :

a) Halla los vectores  $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$ ,  $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$ .

b) Calcula  $a$  y  $b$  tales que  $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ .

$$a) \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$$

$$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$$

$$b) (3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array} \left. \right\} \text{Solución: } a = 2, b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 Comprueba que no es posible expresar el vector  $\vec{x}(3, -1, 0)$  como combinación lineal de  $\vec{u}(1, 2, -1)$  y  $\vec{v}(2, -3, 5)$ . ¿Son linealmente independientes  $\vec{x}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array} \right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $|A'| = 28 \neq 0$ , el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar  $\vec{x}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Como  $\text{ran}(A') = 3$ , los tres vectores son linealmente independientes.

3 Comprueba que cualquiera de los vectores  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(2, 1, 3)$ ,  $\vec{c}(1, 0, 1)$  puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array} \left. \right\} \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que:  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$ ;  $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

**s4** Determina  $m$  y  $n$  para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a)  $\vec{u}(m, -3, 2)$ ,  $\vec{v}(2, 3, m)$ ,  $\vec{w}(4, 6, -4)$

b)  $\vec{u}(3, 2, 5)$ ,  $\vec{v}(2, 4, 7)$ ,  $\vec{w}(1, -1, n)$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m+2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si  $m = -2$ , los vectores son linealmente dependientes.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = \frac{-5}{8}$$

Si  $n = \frac{-5}{8}$ , los vectores son linealmente dependientes.

**s5** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?:

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

Como  $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$ , los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Al ser cuatro vectores en  $\mathbb{R}^3$ , son dependientes, luego no son una base.

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes es una **base** de  $\mathbb{R}^3$ .

**s6** ¿Para qué valores de  $a$  el conjunto de vectores  $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$  es una base?

Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $S$  es una base cuando  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ .

## Producto escalar

**7** En una base ortonormal tenemos  $\vec{a}(1, 2, 2)$  y  $\vec{b}(-4, 5, -3)$ . Calcula:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b)  $|\vec{a}|$  y  $|\vec{b}|$

c)  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

d) El vector proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b)  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$

c) Como  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$

d) Vector proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  (vector cero)

**8** Dados los vectores  $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$  halla  $m$  para que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean:

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1); \vec{b}(-2, 4, m)$

a)  $\frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$

**9** Halla el vector proyección del vector  $\vec{u}(3, 1, 2)$  sobre el vector  $\vec{v}(1, -1, 2)$ .

Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2} (1, -1, 2) = \frac{3 - 1 + 4}{1^2 + 1^2 + 2^2} (1, -1, 2) = \frac{6}{6} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

La proyección es el propio vector  $\vec{v}$ .

**Razonadamente:**

Longitud de la proyección:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &= \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$ :  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\sqrt{6} \cdot \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

- 10** ¿Son  $\vec{a}(1, 2, 3)$  y  $\vec{b}(2, -2, 1)$  ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no son ortogonales.}$$

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{9}} \approx 0,089 \rightarrow \alpha = 84^\circ 53' 20''$$

- 11** Calcula  $m$  para que el vector  $\vec{a}(1, 3, m)$  sea ortogonal al vector  $\vec{b}(1, -2, 3)$ .

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

- 12** Comprueba que el vector  $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$  no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$  sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

### Producto vectorial

- 13** Dados  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , comprueba que los vectores  $\vec{u} \times \vec{v}$  y  $\vec{v} \times \vec{u}$  son opuestos, y halla su módulo.

$$\vec{u}(2, -1, 1); \vec{v}(-1, 3, 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

- 14** Halla el área del paralelogramo que forman los vectores  $\vec{a}(7, -1, 2)$  y  $\vec{b}(1, 4, -2)$ .

$$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1133} \approx 33,66 \text{ u}^2$$

- 15** Halla un vector perpendicular a  $\vec{u}(2, 3, 1)$  y a  $\vec{v}(-1, 3, 0)$  y que sea unitario.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$$

Luego el vector que buscamos es:  $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}\right)$

- 16** Halla un vector ortogonal a  $\vec{u}(1, -1, 0)$  y  $\vec{v}(2, 0, 1)$  cuyo módulo sea  $\sqrt{24}$ .

Un vector ortogonal a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$  es  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$  es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|} (-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea  $\sqrt{24}$ :

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector  $(-2, -2, 4)$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ , y su módulo es  $\sqrt{24}$ .

También cumple estas condiciones su opuesto:  $(2, 2, -4)$ .

### Producto mixto

- 17** Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:

a)  $\vec{u}(1, -3, 2), \vec{v}(1, 0, -1), \vec{w}(2, 3, 0)$

b)  $\vec{u}(3, 2, 1), \vec{v}(1, -2, 0), \vec{w}(-4, 1, 1)$

c)  $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(3, 0, 2), \vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

El paralelepípedo tiene un volumen de  $15 u^3$ .

$$\text{b) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

El paralelepípedo tiene un volumen de  $15 u^3$ .

$$c) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

- s18** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{u}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(-2, 1, 0)$  y  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .

Justifica por qué el resultado es  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ .

$$\bullet \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 u^3$$

$$\bullet |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$$

- 19** Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:

$$\vec{a}(3, -1, 1), \vec{b}(1, 7, 2), \vec{c}(2, 1, -4)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 111 = 18,5u^3$$

- s20** Calcula el valor de  $m$  para que los vectores  $\vec{u}(2, -3, 1)$ ,  $\vec{v}(1, m, 3)$  y  $\vec{w}(-4, 5, -1)$  sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

## Página 150

### PARA RESOLVER

- s21** Prueba que los vectores  $(1, a, b)$ ,  $(0, 1, c)$ ,  $(0, 0, 1)$  son linealmente independientes cualesquiera que sean  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c.$$

Por tanto, son linealmente independientes.

- 22** Dados los vectores  $\vec{a}(1, 2, -1)$  y  $\vec{b}(1, 3, 0)$ , comprueba que el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a  $\vec{a} + \vec{b}$  y a  $\vec{a} - \vec{b}$ .

$$\vec{a}(1, 2, -1)$$

$$\vec{b}(1, 3, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

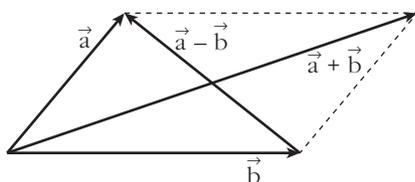
$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son las diagonales del paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Por tanto, están en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Y el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a dicho plano.

Así,  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son perpendiculares a  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

- 23** a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores  $\vec{u}(3, -2, 1)$  y  $\vec{v}(4, 3, -6)$  es un rectángulo.

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas  $|\vec{u} \times \vec{v}|$ .

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$ . Luego  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array} \right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

Por otra parte:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

- 24** Dado el vector  $\vec{v}(-2, 2, -4)$ , halla las coordenadas de los siguientes vectores:

a) Unitario y perpendicular a  $\vec{v}$ .      b) Paralelos a  $\vec{v}$  y de módulo 6.

a)  $\vec{u}(x, y, z)$  ha de cumplir  $-2x + 2y - 4z = 0$  y ser unitario.

$$\text{Por ejemplo, } \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

b)  $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$  y  $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

- 25** Halla un vector ortogonal a  $\vec{u}(2, 3, -1)$  y a  $\vec{v}(1, 4, 2)$  cuya tercera componente sea 1.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) // (2, -1, 1)$$

El vector que buscamos es  $(2, -1, 1)$ .

- s26** Dados los vectores  $\vec{u}_1(2, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2(0, 1, -3)$ ,  $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ , ¿qué relación deben cumplir  $a$  y  $b$  para que  $\vec{u}_3$  sea ortogonal al vector  $\vec{v}(1, 1, 1)$ ?

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que  $\vec{u}_3$  sea perpendicular a  $\vec{v}$  ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

- s27** Calcula las coordenadas de un vector  $\vec{u}$  que sea ortogonal a  $\vec{v}(1, 2, 3)$  y  $\vec{w}(1, -1, 1)$  y tal que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$ .

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a  $\vec{v}$  y a  $\vec{w}$  es de la forma  $(5k, 2k, -3k)$ .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por tanto:  $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

- s28** a) Obtén  $\lambda$  para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$$\vec{u}_1 = (3, 2, 5), \vec{u}_2 = (2, 4, 7), \vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$$

- b) Para  $\lambda = 3$ , expresa el vector  $\vec{v} = (7, 11, 14)$  como combinación lineal de  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$ .

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-27}{8}$$

- b) Para  $\lambda = 3$ , tenemos que:  $\vec{u}_1(3, 2, 5)$ ;  $\vec{u}_2(2, 4, 7)$ ;  $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos  $\vec{v}$  como combinación lineal de  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$ :

$$(7, 11, 14) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 2b + c = 7 \\ 2a + 4b - 3c = 11 \\ 5a + 7b + 3c = 14 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -3 \\ 14 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{102}{51} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 11 & -3 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{51}{51} = 1;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix}}{51} = \frac{-51}{51} = -1$$

Por tanto:  $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

**s29** a) Determina los valores de  $a$  para los que resultan linealmente dependientes los vectores  $(-2, a, a)$ ,  $(a, -2, a)$  y  $(a, a, -2)$ .

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

$$a) \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para  $a = 1$  y para  $a = -2$ , los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para  $a = 1$ , queda:  $(-2, 1, 1)$ ,  $(1, -2, 1)$ ,  $(1, 1, -2)$ , y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para  $a = -2$ , queda:  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$ , y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

**s30** Dados los vectores  $\vec{u}(1, -1, 2)$  y  $\vec{v}(3, 1, -1)$ , halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a  $\vec{u}$ , sean coplanarios con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Sea  $\vec{w}(x, y, z)$  un vector tal que:

1.º Es perpendicular a  $\vec{u}$ , es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2.º Es coplanario con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2z = -y \\ -x + 4z = -7y \end{array} \quad \text{Sumando:} \quad \begin{array}{l} 6z = -6y \rightarrow z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array}$$

Soluciones:  $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

**s31** Dados los vectores  $\vec{u}(a, 1+a, 2a)$ ,  $\vec{v}(a, 1, a)$  y  $\vec{w}(1, a, 1)$ , se pide:

a) Halla los valores de  $a$  para los que los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector  $\vec{c}(3, 3, 0)$  depende linealmente de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  para el caso  $a = 2$ .

c) Justifica razonadamente si para  $a = 0$  se cumple la igualdad  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ .

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) Para  $a = 2$ , los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes. Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes, forman una base de  $\mathbb{R}^3$ .

Así, cualquier otro vector, y, en particular  $\vec{c}(3, 3, 0)$ , depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para  $a = 2$ , tenemos que:  $\vec{u}(2, 3, 4)$ ,  $\vec{v}(2, 1, 2)$ ,  $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto:

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  para  $a = 0$ . Está probado en el apartado a).

- s32** a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto  $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$ .
- b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de  $S$ ?
- c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ .

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad \text{ran}(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en  $S$ .

- b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma:  $\vec{u} = (k, k, k)$  con  $k \neq 0$ . Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de  $S$  como sigue:

$$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$$

- c) Sea  $\vec{v}(1, 1, x)$  el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ , tenemos que:

$$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array} \right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x = -1$$

Por tanto, el vector es  $\vec{v}(1, 1, -1)$ .

- s33** Halla un vector  $\vec{u}$  de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$  y tal que determine con el vector  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 \text{ u}^2$ .

Si  $\vec{u}$  es de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$ , será de la forma  $\vec{u}(x, -2x, 3x)$ , con  $x \neq 0$ .

Para que forme con  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 \text{ u}^2$ , ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$$

$$\text{es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones:  $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$  y  $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

**s34** Halla un vector  $\vec{v}$  coplanario con  $\vec{a}(2, -1, 1)$  y  $\vec{b}(1, 0, 3)$  y ortogonal a  $\vec{c}(2, 3, 0)$ .

Sea  $\vec{v}(x, y, z)$  tal que:

1.º es coplanario con  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2.º es ortogonal a  $\vec{c}$ , es decir:  $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

Soluciones:  $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$  ( $\lambda \neq 0$ )

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para  $\lambda = 1$ , tenemos el vector  $(-3, 2, 1)$ .

**s35** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tales que  $|\vec{a}| = 4$  y  $|\vec{b}| = 2$ , con  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ .

Calcula  $|\vec{a} + \vec{b}|$  y  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \\ &= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \\ &= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

**s36** De dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sabemos que son ortogonales y que  $|\vec{u}| = 6$  y  $|\vec{v}| = 10$ .

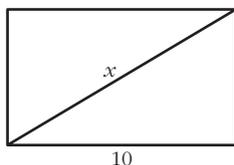
Halla  $|\vec{u} + \vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, entonces  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Así:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow \\ &\rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

**Observación:** Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$ . En este caso,  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$  son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,66$$

**s37** **Calcula el ángulo que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sabiendo que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  y  $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ .**

Puesto que  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ , empecemos desarrollando esta expresión:

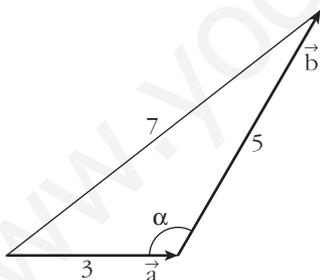
$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Sustituimos  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{a}|$  y  $|\vec{b}|$  por sus valores, y  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  por su expresión,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ :

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$$

Veamos otra forma de resolverlo, basada en la resolución de triángulos aprendida en 1.º de Bachillerato:

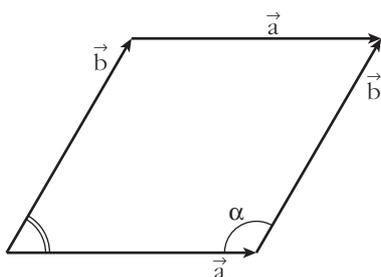


Aplicamos el teorema del coseno a este triángulo:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

Observamos que el ángulo buscado es el suplementario de  $\alpha$ :



$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

- 38** De los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sabemos que cumplen  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$ ,  $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$ , siendo  $\vec{a}(2, -1, 0)$  y  $\vec{b}(1, 3, -1)$ . Halla el ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \end{array}$$

$$\frac{5\vec{u}}{5\vec{v}} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2\vec{a} - \vec{b}}$$

El ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  coincide con el ángulo formado por  $\vec{u}' = 5\vec{u}$  y  $\vec{v}' = 5\vec{v}$ :

$$\vec{u}' = (7, 0, -1); \quad \vec{v}' = (3, -5, 1)$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 20$$

$$|\vec{u}'| = \sqrt{50}; \quad |\vec{v}'| = \sqrt{35}$$

$$\cos(\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} ) = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} = \frac{20}{\sqrt{50} \sqrt{35}} = 0,4781$$

$$(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = (\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} ) = 61^\circ 26' 21''$$

- 39** Los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  cumplen las siguientes condiciones:

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .

• Desarrolla el siguiente producto escalar:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

Desarrollando el producto escalar indicado:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

$$\text{Por otra parte: } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{Así: } 5^2 + 4^2 + 7^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

## Página 151

### CUESTIONES TEÓRICAS

- 40** Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ , ¿podemos asegurar que  $\vec{v} = \vec{w}$ ?

No. Por ejemplo, si  $\vec{u}(3, -2, 0)$ ,  $\vec{v}(5, 1, 0)$  y  $\vec{w}(7, 4, 0)$ , tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo,  $\vec{v} \neq \vec{w}$ .

- 41** Prueba, utilizando el producto escalar, que si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $\vec{a} \perp \vec{c}$  entonces  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Para demostrar que  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ , tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto,  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .

- 42** Demuestra que si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son ortogonales.

Supongamos que  $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ , entonces:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \quad (\text{pues } |\vec{a}| = |\vec{b}|)$$

**Observación:** Si recordamos que  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son las diagonales del paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

- 43** a) ¿Puede haber dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tales que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ ,  $|\vec{u}| = 1$ ,  $|\vec{v}| = 2$ ?  
 b) Si dos vectores verifican  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$ , ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 2 \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -\frac{3}{2} > 1 \text{ Imposible.}$$

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

$$\text{b) Si } |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}||\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \\ -|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 1 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0^\circ \\ |\vec{u}||\vec{v}| = -|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -1 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 180^\circ \end{cases}$$

Por tanto,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen la misma dirección.

- 44** Justifica por qué el producto mixto de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{a} + \vec{b}$  es igual a 0 cualesquiera que sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{a} + \vec{b}$  son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

**45** Dados los vectores  $\vec{a}(1, -2, 3)$ ,  $\vec{b}(3, 1, 1)$ ,  $\vec{c}(-2, 0, 1)$ , comprueba que:

a)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

**46** Si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ , ¿es  $\vec{b} = \vec{c}$  necesariamente? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo, si consideramos  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(2, 4, 6)$  y  $\vec{c}(3, 6, 9)$ , entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

**s47** Sean  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$ ,  $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$ ,  $[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}]$

Puesto que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , y  $\vec{c}$  son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1)$ ;  $\vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1)$ ;  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ . Son L.I.

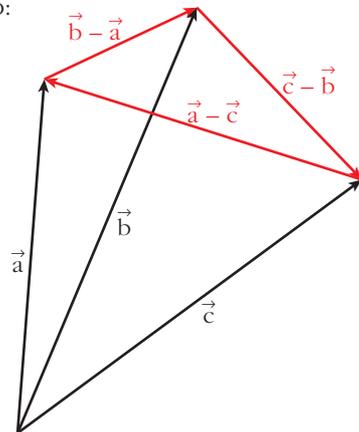
Análogamente:

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . Son L.I.

$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ . Son L.D.

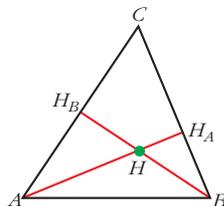
Interpretación geométrica de este último resultado:

Los vectores  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{b}$ ,  $\vec{b} - \vec{a}$  son los lados del triángulo cuyos vértices son los extremos de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  cuando los situamos con origen común. Por tanto,  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{b}$  y  $\vec{b} - \vec{a}$  son coplanarios.



**PARA PROFUNDIZAR**

**48** “Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto”.



Para demostrarlo, llamamos  $H$  al punto en que se cortan dos alturas,  $AH_A$  y  $BH_B$ . Da los pasos que se indican a continuación:

a) Justifica que 
$$\begin{cases} \vec{H_A} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_B}) = 0 \\ \vec{H_B} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_A}) = 0 \end{cases}$$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\vec{H_C} \cdot (\vec{H_B} - \vec{H_A}) = 0$$

y de aquí se concluye que  $\vec{H_C} \perp \vec{AB}$  y, por tanto, que las tres alturas se cortan en  $H$ . (Justifica las afirmaciones anteriores).

a)  $\vec{H_C} - \vec{H_B} = \vec{B_C}$ ; y, como  $AH_A$  es la altura correspondiente al lado  $BC$ , entonces:

$$\vec{B_C} \perp \vec{A_H_A} \rightarrow \vec{B_C} \perp \vec{H_A} \rightarrow \vec{H_A} \cdot \vec{B_C} = 0 \rightarrow \vec{H_A} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_B}) = 0$$

Análogamente, como  $\vec{H_C} - \vec{H_A} = \vec{A_C}$ , tenemos que:  $\vec{H_B} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_A}) = 0$

b) 
$$\begin{aligned} \vec{H_C} \cdot (\vec{H_B} - \vec{H_A}) &= \vec{H_C} \cdot \vec{H_B} - \vec{H_C} \cdot \vec{H_A} = \vec{H_B} \cdot \vec{H_C} - \vec{H_A} \cdot \vec{H_C} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \vec{H_B} \cdot \vec{H_C} - \vec{H_A} \cdot \vec{H_B} = \vec{H_B} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_A}) \stackrel{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$(1) \vec{H_A} \cdot \vec{H_C} - \vec{H_A} \cdot \vec{H_B} = 0 \rightarrow \vec{H_A} \cdot \vec{H_C} = \vec{H_A} \cdot \vec{H_B}$$

$$(2) \vec{H_B} \cdot (\vec{H_C} - \vec{H_A}) = 0$$

Por tanto, si  $\vec{H_C} \cdot (\vec{H_B} - \vec{H_A}) = 0$ , como  $\vec{H_B} - \vec{H_A} = \vec{A_B}$ , entonces  $\vec{H_C} \perp \vec{A_B}$ ; luego  $H$  también pertenece a la altura correspondiente al vértice  $C$ . Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto,  $H$ .

## AUTOEVALUACIÓN

1. a) Halla el valor de  $m$  para el cual  $\vec{u}(1, 2, -1)$ ,  $\vec{v}(0, 1, 2)$  y  $\vec{w}(-1, m, 3)$  son linealmente dependientes.

b) Obtén, en este caso, una relación de dependencia entre  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

a) Para que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean L.D., el rango de la matriz que forman ha de ser menor que 3. Así:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - 2m = 0 \rightarrow m = -1$$

Si  $m = -1$ , los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son L.D.

b) Sea  $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rightarrow (1, 2, -1) = \alpha(0, 1, 2) + \beta(-1, -1, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = -\beta \\ 2 = \alpha - \beta \\ -1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Así,  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$ .

2.  $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$ ,  $\vec{v}(4, -2, -4)$ . Halla  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$ ,  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  y el vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .

$$\bullet |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\bullet |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} = \\ &= \frac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0,3780 \end{aligned}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos(0,3780) = 67^\circ 47' 26''$$

• Vector proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ :

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16} (4, -2, -4) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) (4, -2, -4)$$

**3. Dados los vectores  $\vec{u}(3, -4, 0)$  y  $\vec{v}(m, 0, 7)$ :**

a) Halla  $m$  para que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sean perpendiculares.

b) Halla un vector  $\vec{w}$  perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ .

c) Obtén tres vectores unitarios,  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}'$ , que tengan, respectivamente, la misma dirección que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

d) ¿Forman  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{w}'$  una base ortonormal?

a) Como  $|\vec{u}| \neq 0$  y  $|\vec{v}| \neq 0$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \rightarrow m = 0$$

Así,  $\vec{v}(0, 0, 7)$ .

b)  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ .

$$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$$

c)  $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$$|\vec{v}| = 7$$

$$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$$

Sean:

$$\vec{u}' = \frac{1}{5}(3, -4, 0) \quad \vec{u}'\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right) // \vec{u}$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{7}(0, 0, 7) \quad \vec{v}'(0, 0, 1) // \vec{v}$$

$$\vec{w}' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0) \quad \vec{w}'\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) // \vec{w}$$

$\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}'$  tienen módulo 1.

d)  $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$  no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base  $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$  es ortonormal.

**4. Halla el área del triángulo determinado por los vectores  $\vec{u}(5, -1, 3)$  y  $\vec{v}(4, 0, 7)$ .**

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |(-7, -23, 4)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + (-23)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{594} = 12,2 \text{ u}^2$$

**5. Halla el volumen del tetraedro determinado por los vectores:**

$$\vec{u}(5, -1, 3), \vec{v}(4, 0, 7), \vec{w}(-2, 6, 3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \text{valor absoluto de} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-112| = \frac{56}{3} = 18,7 \text{ u}^3$$

**6. Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a  $(3, -1, 0)$  y forme un ángulo de  $60^\circ$  con  $(0, 0, 1)$ .**

Llamamos  $(x, y, z)$  al vector buscado:

- Su módulo es 10  $\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$
- Es perpendicular a  $(3, -1, 0) \rightarrow 3x - y = 0$
- Forma un ángulo de  $60^\circ$  con  $(0, 0, 1) \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{(0, 0, 1) \cdot (x, y, z)}{|(0, 0, 1)| \cdot |(x, y, z)|} = \cos 60^\circ \rightarrow \frac{z}{1 \cdot 10} = \frac{1}{2} \rightarrow 2z = 10 \rightarrow z = 5$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ 3x - y = 0 \\ z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ y = 3x \\ z = 5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup> ecuación en la 1.<sup>a</sup>:

$$x^2 + 9x^2 + 25 = 100 \rightarrow 10x^2 = 75 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$\text{Soluciones: } \left( \sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5 \right) \text{ y } \left( -\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5 \right)$$