1 **Sean los vectores:**

$\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ $\vec{v}_2 = (-2, 0, 2)$ **y** $\vec{v}_3 = (3, -1, -2)$

**Comprueba que forman una base de V$^3$.**

**Halla las coordenadas respecto de dicha base de los vectores** $\vec{u} = (1, 2, 3)$ **y** $\vec{w} = (-1, 2, -1)$**.**

Solución:

Para ver si son linealmente independientes estudiamos el determinante de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|C| = 6$ no es nulo, no hay ninguna columna o fila que sea combinación lineal de las otras; por tanto, los vectores son linealmente independientes, y por tanto forman una base de **V$^3$**.

Es decir, para cualquier $\vec{x} = (x, y, z)$ de **V$^3$** existen escalares $a$, $b$, $c$ reales tales que $\vec{x} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$.

Desarrollando esta ecuación vectorial, obtenemos:

$a = \frac{1}{3}(x + y + z)$, $b = \frac{1}{6}(x - 5y + 4z)$, $c = \frac{1}{3}(x - 2y + z)$

Las coordenadas pedidas en la base dada son, para $\vec{u}$ : $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, y para $\vec{w}$ : $a = 0$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -2$.

2 **Calcula el vector (*a*, *b*, *c*) sabiendo que es combinación lineal de los vectores (0, 1, 1) y (0, 2, 3) y que sus coordenadas cumplen que *a* - *b* + *c* = 2 y que *b* + *c* = 12.**

Solución:

De $(a, b, c) = x(0, 1, 1) + y(0, 2, 3)$ se deduce que $a = 0$, $b = x + 2y$, $c = x + 3y$.

Teniendo en cuenta las relaciones dadas, resulta $x = 1$, $y = 2$, y por tanto $(a, b, c) = (0, 5, 7)$.

3 **Calcular los valores de x e y para que el vector ( x, y, 1 ) sea ortogonal a los vectores: ( 3, 2, 0 ) y ( 2, 1 , -1 )**

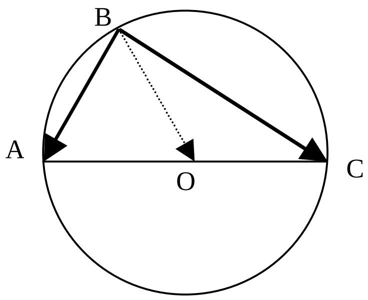
Solución:

Sean $\vec{a} = (x,y,1)$ ,$\vec{b} = (3,2,0)$ , $\vec{c} = (2,1,-1)$

Por ser el vector $\vec{a}$ ortogonal a $\vec{b}$ y $\vec{c}$ , se verifica : $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ , y recordando la expresión del producto escalar, se obtiene: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3x + 2y = 0$ ; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 2x + y - 1 = 0$ , que nos conduce al sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array}\right\}$ cuya solución es

x = 2, y = -3; luego el vector $\vec{a}$ es ( 2, -3, 1 )

4 **Prueba que todo triángulo inscrito en una circunferencia, con un lado igual a un diámetro, es rectángulo.**




Solución:

Veamos que $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$, es decir, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} =$$

$$= \left|\overrightarrow{BO}\right|^2 + \overrightarrow{BO}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}) - \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 =$$

$= r^2 - r^2 = 0,$ dado que $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ $y$ $\left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| = r$.

5 **Hallar a y b para que (a, b, 1) sea perpendicular a $\vec{u}$ = (2, -3, 1) y $\vec{v}$ = (1, 2, 4).**

Solución:

Como $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-14,-7,7)$, dividiendo entre 7, $\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{7}$ = (-2, -1, 1) = (a, b, 1), por lo que a = -2 y b = -1.

6 **Dados los puntos A ( 1, 0, 1 ), B ( 1, 1, 1 ) y C ( 1, 6 , a ), se pide:**
**1) Hallar para qué valores del parámetro a están alineados**
**2) Hallar si existen valores de a para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.**

Solución:

1) A, B y C están alineados implica que los vectores AB = ( 0, 1, 0 ) y AC = ( 0, 6, a -1 ) son paralelos, luego sus componentes son proporcionales: ( 0, 6, a - 1 ) = k ( 0, 1, 0 ) $\Rightarrow$ a = 1

2) El módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC es igual al área del paralelogramo construido sobre AB y AC:

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = 3 \quad\Rightarrow\quad (a-1)^2 = 9 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a = 4, & C(1,6,4) \\ a = -2, & C(1,6,-2) \end{cases}$$

7 **¿Son linealmente dependientes los vectores (4, 3, 2), (3, 2, 1) y (-2, -1, 0)?**

Solución:

Basta ver si el producto mixto es nulo o no.

[(4, 3, 2), (3, 2, 1), (-2, -1, 0)] = $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ linealmente dependientes.

8 **Simplificar la expresión :**
$(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{u}-\vec{v}-\vec{w})$
**sabiendo que el vector $\vec{w}$ es linealmente dependiente de $\vec{u},\vec{v}$.**

Solución:
Escribimos $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ Sea $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ .
Se tiene:

$$(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{u}-\vec{v}-\vec{w})=\left[(1+a)\vec{u}+(1+b)\vec{v}\right]\times\left[(1-a)\vec{u}-(1+b)\vec{v}\right]=$$
$$=(1+a)\vec{u}\times(1-a)\vec{u}-(1+a)\vec{u}\times(1+b)\vec{v}+(1+b)\vec{v}\times(1-a)\vec{u}-(1+b)\vec{v}\times(1+b)\vec{v}=$$
$$=-(1+a)(1+b)\vec{u}\times\vec{v}+(1+b)(1-a)\vec{v}\times\vec{u}=$$
$$=(1+a+b+ab)\vec{v}\times\vec{u}+(1-a+b-ab)\vec{v}\times\vec{u}=$$
$$=-2a(1+b)\vec{v}\times\vec{u}$$

9 **Comprobar si los puntos A(6, 5, -4), B(3, 3, -1) y C(0, 1, 2) están alineados hallando la recta r que pasa por A y B, y comprobando si C pertenece a r o no.**

Solución:
r : (x, y, z) = (6, 5, -4) + t(-3, -2, 3)
Para que C pertenezca a r, debemos encontrar t que verifique la igualdad:
(0, 1, 2) = (6, 5, -4) + t(-3, -2, 3) $\Rightarrow$ t(-3, -2, 3) = (-6, -4, 6)
Por lo que t = 2, con lo que sí están alineados.

10 **Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ y pasa por el origen de coordenadas.**

Solución:
La recta dada pasa por el punto A ( 1, 1, 1 ) y su dirección es la del vector ( 2, 3, 4 ), por tanto, el plano buscado pasa por el punto 0 ( 0, 0, 0 ), y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$ y $\vec{u}=(2,3,4)$
Las ecuaciones paramétricas del palno pedido son:

$$\begin{cases} x=0+s+2t \\ y=0+s+3t \\ z=0+s+4t \end{cases}$$

eliminando s y t resulta:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 3 \\ z & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$$

x - 2y + z = 0, ecuación en forma implícita del plano pedido.

11 **Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos A (2, 0 , 0 ) y B ( 0, 1, 0 ).**

Solución:
Observando los datos, resulta que el plano pedido P, pasa por el punto ( 1, 1, 0 ), puesto que contiene a la recta dada, es paralelo al vector ( 2, 3, 1 ), por contener a la recta dada, es paralelo al vector $\overrightarrow{AB} = (-2,1,0)$ . Por tanto , sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 1 + 2t - 2s \\ y = 1 + 3t + s \\ z = 0 + t \end{cases}$ y eliminando t y s , resulta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ y-1 & 3 & 1 \\ z & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

x + 2y - 8z - 3 = 0

12 **Discutir la posición de los planos:**

$$\begin{cases} \mathbf{3x - ay + 2z - (a-1) = 0} \\ \mathbf{2x - 5y + 3z - 1 = 0} \\ \mathbf{x + 3y - (a-1)z = 0} \end{cases}$$

**según los valores de a**

Solución:
Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes del sistema y de la matriz ampliada:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -(a-1) & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando **|** C **|** , se obtiene : **|** C **|** = - $2a^2$ + 14a - 20, entonces, **|** C **|** = -2 ( a - 5 ) ( a - 2 ). Luego:
- si a $\neq$ 5 y a $\neq$ 2 es **|** C **|** $\neq$ 0, luego r ( C ) = r ( A ) = 3 y, por tanto, los tres planos tienen un punto común, luego forman un triedro.
- si a = 5, es r ( C ) = 2 y r ( A ) = 3, por tanto, los tres planos no tienen ningún punto en común y como no hay dos que sean paralelos, forman una superficie prismática triangular.
- si a = 2, es r ( C ) = r ( A ) = 2 y , por tanto, los tres planos pertenecen a un mismo haz.

13 **1) Dado un haz lineal de planos, ¿se puede garantizar que toda recta del espacio esté contenida en uno de los planos del haz?**
**2) Dado un haz lineal de planos, ¿puede existir un punto que pertenezca exactamente a dos planos del haz?**

Solución:
1) Considerando que dos rectas que están en el mismo plano se cortan o son paralelas, sólo si la recta corta o es paralela a la recta base del haz podemos asegurar que está contenida en uno de los planos del haz.
2) Una recta y un punto que no pertenece a la recta determinan un plano único. Si el punto no pertenece a la recta base del haz, sólo habrá un plano del haz que lo contenga. Si el punto pertenece a la recta base del haz, todos los planos del haz lo contienen.

14 **Averiguar para qué valor de m la recta** $\begin{matrix} \mathbf{x + 2y + z - m = 0} \\ \mathbf{2x - y - z + 2 = 0} \end{matrix}$ **corta a la recta** $\mathbf{\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}}$ **y hallar ese punto.**

Solución:
Las ecuaciones de la segunda recta se pueden escribir en la forma:

$$3x - 2y - 5 = 0$$

$$5x - 2z + 3 = 0$$

Para que las dos rectas se corten, los dos planos que definen la primera recta dada y los dos que definen la segunda han de tener un punto común; dicho de otro modo, el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z - m = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \\ 5x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

ha de tener una solución, para lo cual la matriz M de coeficientes y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -m \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ampliada tienen que tener igual rango; puesto que la matriz A es cuadrada, se deduce que su determinante debe ser igual a cero. Desarrollando |A| = 0, resulta:

$$m = \frac{25}{4}$$

que es el valor pedido. Como el determinante deducido de A,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

es distinto de cero, se deduce que el rango de A es igual al de M e igual a tres ( número de incógnitas ) y, por tanto, el sistema tiene una sola solución, que se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y - 5 = 0 \\ 5x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Resuelto por cualquiera de los procedimientos habituales se obtienen las coordenadas del punto común de las dos rectas:

$$x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{4}, z = \frac{21}{4}$$

15 **Dadas las rectas de ecuaciones**

$$\mathbf{r:} \begin{cases} \mathbf{3x - 2z = -3} \\ \mathbf{3x - kz = 3 - 4k} \end{cases} \quad \mathbf{s:} \begin{cases} \mathbf{3y - 2z = -2} \\ \mathbf{kx - 2y = k - 4} \end{cases}$$

**determinar los valores de k para los cuales las rectas r y s están en un mismo plano.**

Solución:

Sea A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -k & 3-4k \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ k & -2 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$

Para que tenga trango 3 : |A| = $-3\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & -k & 3-4k \\ k & 0 & k-4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 3 & -k & 3-4k \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6k^2 + 24 = 0$

De esta igualdad obtenemos -6 ( $k^2$ -4 ) = 0 si y sólo si k = 2 ó k = -2
Descartamos la solución k = 2 porque entonces los dos planos de r son paralelos, con lo que nos queda la solución única k = -2.

16 **Dadas las rectas del espacio:**

$\begin{cases} \mathbf{x = z - 1} \\ \mathbf{y = 2 - 3z} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x - 4 = 5z} \\ \mathbf{y = 4z - 3} \end{cases}$

**Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y corta a la dos rectas dadas.**

Solución:
Si r es la primera recta y r´ la segunda, el plano definido por O y r cortará a r´ en un punto M ( si no ocurre asi no existe la recta pedida ) y la recta OM es la recta pedida. Para hallar el punto M y la recta OM podemos primero hallar la ecuación del plano p determinado por O y r:
El haz de planos de base r tiene de ecuación:
t ( x - z + 1 ) + s ( y + 3z - 2 ) = 0
De los planos de este haz, pasa por O el que verifica:
t ( 0 - 0 + 1 ) + s ( 0 + 0 - 2 ) = 0
es decir, el que cumple t = 2s.
Sustituyendo y operando queda p : 2x + y + z = 0
Hallamos el punto M de intersección de P y r´, resolviendo el sistema:

$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x = 4 + 5z \\ y = -3 + 4z \end{cases}$

se obtiene

$M\left(\frac{7}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

La dirección de la recta OM, será la del vector:

$\vec{v} = 3 \cdot \overrightarrow{OM} = (7, -13, -1)$

La ecuación de OM es, pues

$\begin{cases} x = 7t \\ y = -13t \\ z = -t \quad t \in \Re \end{cases}$

17 **Dadas las rectas de ecuaciones**

$\mathbf{r:} \begin{cases} \mathbf{3x - 2z = -3} \\ \mathbf{3x + 2z = 11} \end{cases} \qquad \mathbf{s:} \begin{cases} \mathbf{3y - 2z = -2} \\ \mathbf{-2x - 2y = -6} \end{cases}$

**determinar la ecuación del plano que las contiene.**

Solución:
La recta r es, evidentemente paralela al eje OY ( pues ambos planos lo son ). Un vector director es:
$\vec{d}_1(0,1,0)$
Un vector director de s es:
$\vec{d}_2 = (0,3,-2)\times(1,1,0) = (2,-2,-3)$
Un punto P ( 3, 0, 1 ) del plano es un punto cualquiera de ellos, tomamos P ( 3, 0, 1 ) que pertenece a la recta s.
El plano buscado tiene como vector normal:
$\vec{n} = \vec{d}_1\times\vec{d}_2 = (-3,0,-2)$
La ecuación del plano es entonces : -3 ( x - 3 ) + 0 ( y - 0 ) - 2 ( z - 1 ) = 0. Es decir : 3x + 2z - 11 = 0