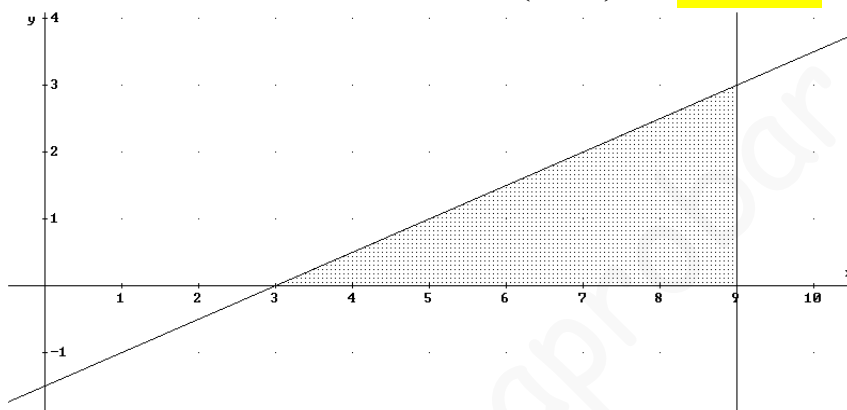


EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

- 1.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \frac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 3$ y $x = 9$

Se trata de un triángulo de base 6 y altura $f(9) = 3$

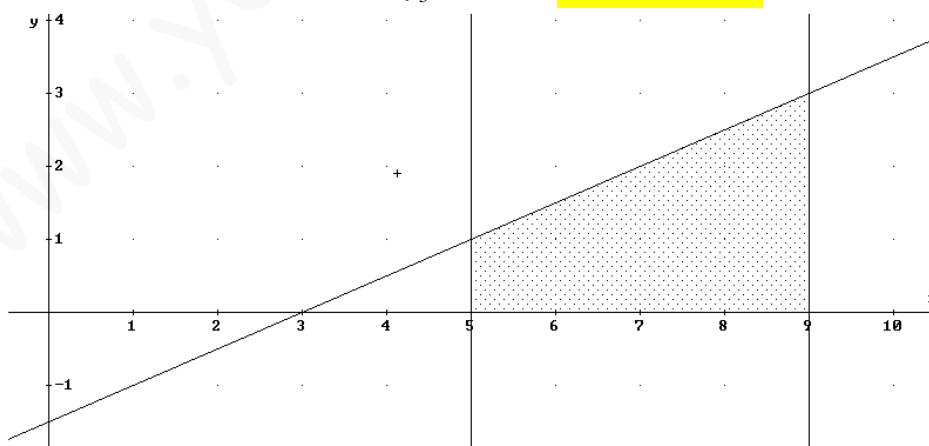
$$\text{El área sombreada es } = \int_3^9 \frac{x-3}{2} dx = \frac{1}{2} \int_3^9 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right) dx = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ u}^2$$



- 2.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \frac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 5$ y $x = 9$

Es un trapecio de bases: $f(5) = 1$ y $f(9) = 3$, y de altura 4 unidades

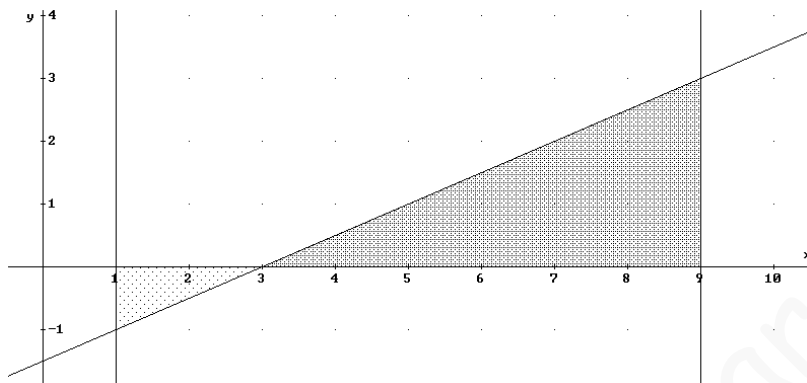
$$\text{Es el área sombreada } = \int_5^9 \frac{x-3}{2} dx = \frac{(1+3) \cdot 4}{2} = 8 \text{ u}^2$$



- 3.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \frac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 1$ y $x = 9$

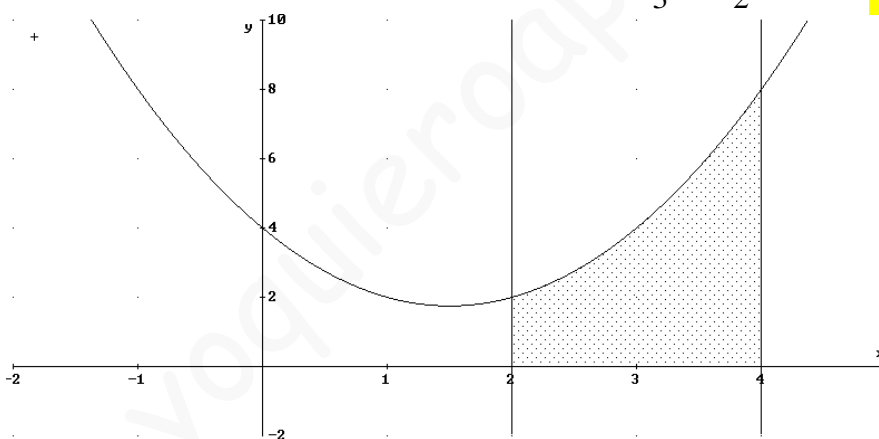
Es la suma de dos triángulos. El pequeño de base 2 y altura $f(1) = 1$; el grande de base 6 y de altura $f(9) = 3$

$$\text{Es el área sombreada} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{6 \cdot 3}{2} = 10 \text{ u}^2$$



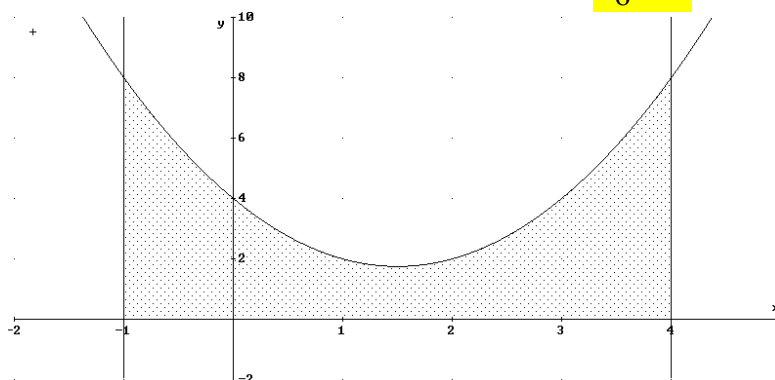
4.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 - 3x + 4$, el eje OX, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

$$\text{Es el área sombreada} = \int_2^4 (x^2 - 3x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_2^4 = \frac{26}{3} \text{ u}^2$$



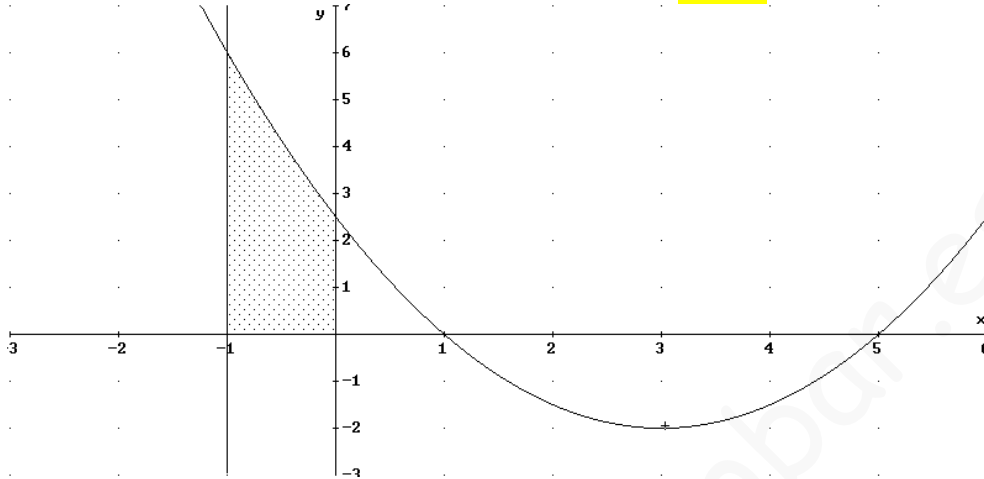
5.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 - 3x + 4$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x = 4$

$$\text{Es el área sombreada} = \int_{-1}^4 (x^2 - 3x + 4) dx = \frac{115}{6} \text{ u}^2$$



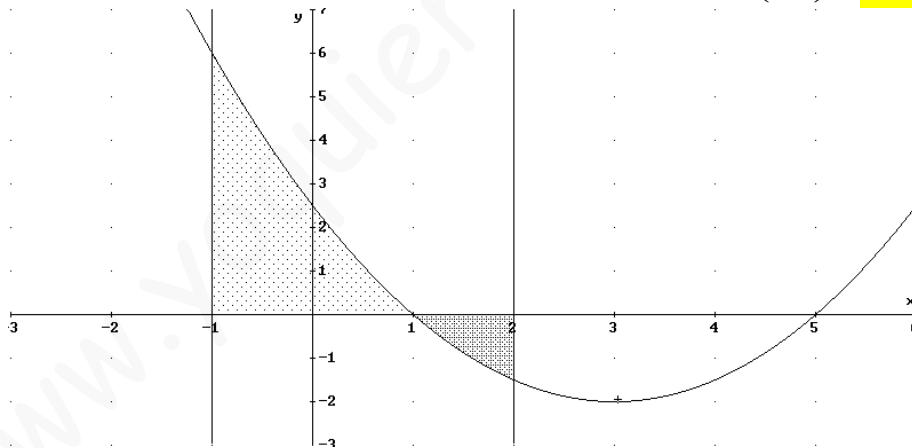
6.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x = 0$

$$\text{Es el área sombreada} = \int_{-1}^0 \frac{x^2 - 6x + 5}{2} dx = \frac{25}{6} u^2$$



7.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x = 2$

$$\text{Es el área sombreada} = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 6x + 5}{2} dx - \int_1^2 \frac{x^2 - 6x + 5}{2} dx = \frac{32}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{37}{3} u^2$$

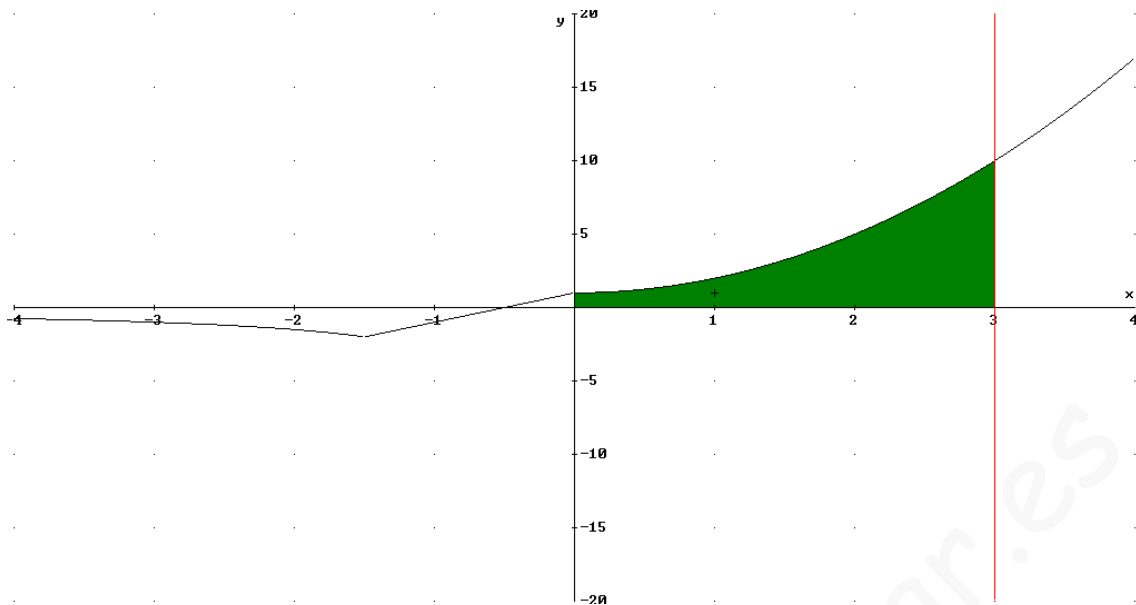


8.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ 2x+1 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide, calcular el área del recinto plano limitado por la grafica de $f(x)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$.

La representación gráfica del recinto al que hay que calcularle el área es:



Calculamos los límites de integración. Uno es $x = 0$ (ya que el área está limitada por el eje OY) y el otro es $x = 3$ (recta dada). Por tanto, el área pedida vendrá dada por la siguiente integral:

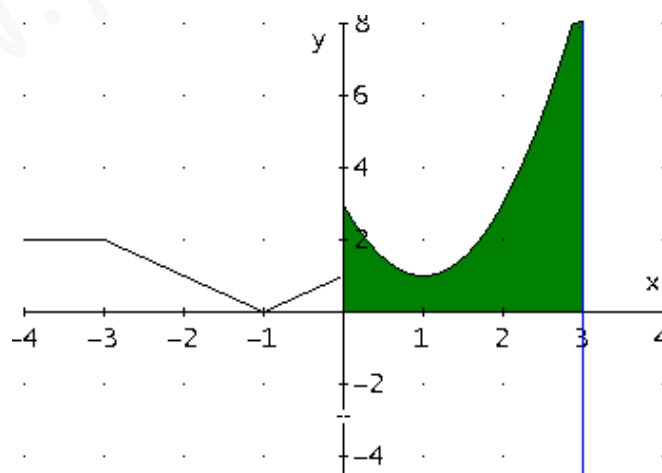
$$A = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 - \left(\frac{0^3}{3} - 0 \right) = 12$$

Así, el área buscada es de **12 u²**.

9.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ |x+1| & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide: Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$.



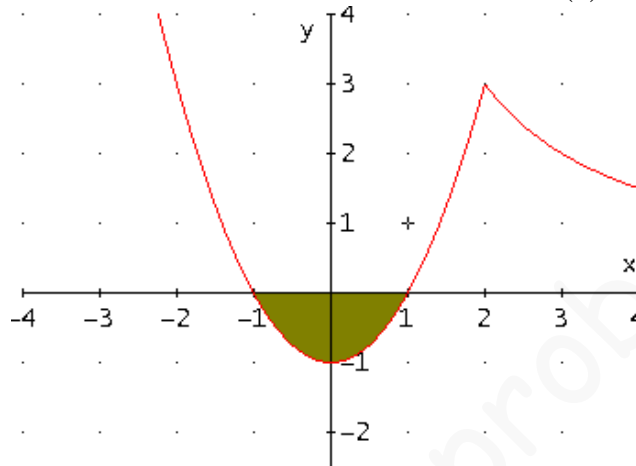
Los límites de integración son $x = 0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x = 3$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 4x + 3) dx = 2 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 3x \Big|_0^3 = 2 \frac{3^3}{3} - 4 \frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 = 18 - 18 + 9 = 9 \text{ u}^2$$

10.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{6}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto cerrado que delimita la gráfica de $f(x)$ y el eje OX .



Los límites de integración son los puntos donde la función corta al eje OX . En nuestro caso:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

(ten en cuenta que $\frac{6}{x} \neq 0$ ya que una fracción es cero sólo cuando el numerador lo es)

El área pedida es¹:

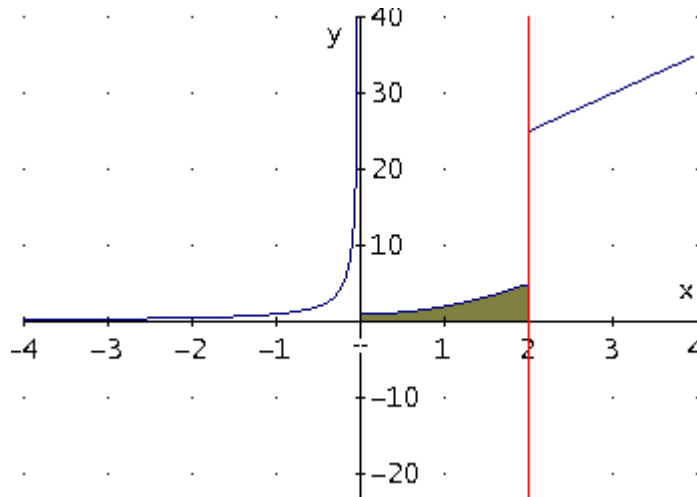
$$\begin{aligned} A &= -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = -\left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \\ &= -\left(\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

11.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5x + 15 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.

¹ La integral lleva signo negativo, por que el área pedida está por debajo del eje X.



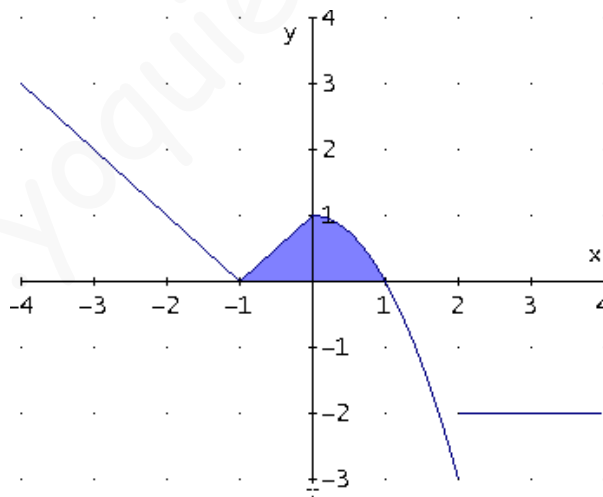
Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=2$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{0}{3} + 0 \right) = \frac{13}{3} \text{ u}^2$$

12.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se pide: Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje OX.



Los límites de integración son los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$|x+1| = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow$ solo nos vale $x = 1$, ya que $x = -1$ está fuera del dominio

$-2 = 0$ nunca

Así, los límites de integración son $x = -1$ y $x = 1$

El área pedida es:

$$A = \int_{-1}^0 |x+1| dx + \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} u^2$$

13.- Determina el valor de a para que el área comprendida por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ sea 21 unidades de área.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Así, tenemos la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^2 (ax^2 + 2) dx = 21 \Leftrightarrow a \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_{-1}^2 = 21 \Leftrightarrow a \frac{8}{3} + 4 - \left(-a \frac{1}{3} - 2 \right) = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8a}{3} + \frac{12}{3} + \frac{a}{3} + \frac{6}{3} = 21 \Leftrightarrow 9a + 18 = 63 \Leftrightarrow a = \frac{63-18}{9} \Leftrightarrow a = \frac{45}{9} \Leftrightarrow a = 5$$

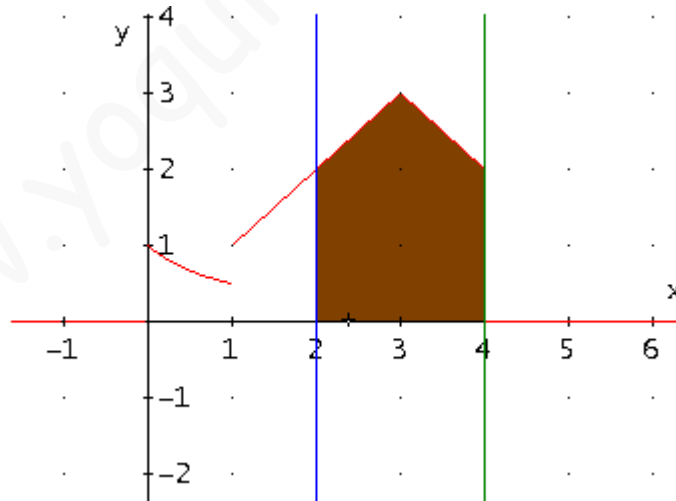
Por tanto, la función es $f(x) = 5x^2 + 2$

14.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 3 \\ 6-x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Calcula el área del recinto limitado por el eje OX , la gráfica de f y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x = 2$ y $x = 4$. La gráfica de la función es:



Ojo, aunque los límites de integración son $x = 2$ y $x = 4$, en ese intervalo hay dos funciones que están por encima, luego hay que calcular el punto de corte de ambas funciones (sólo nos interesa la coordenada x), para dividir el intervalo en dos intervalos:

$$x = 6 - x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, tenemos que calcular dos integrales:

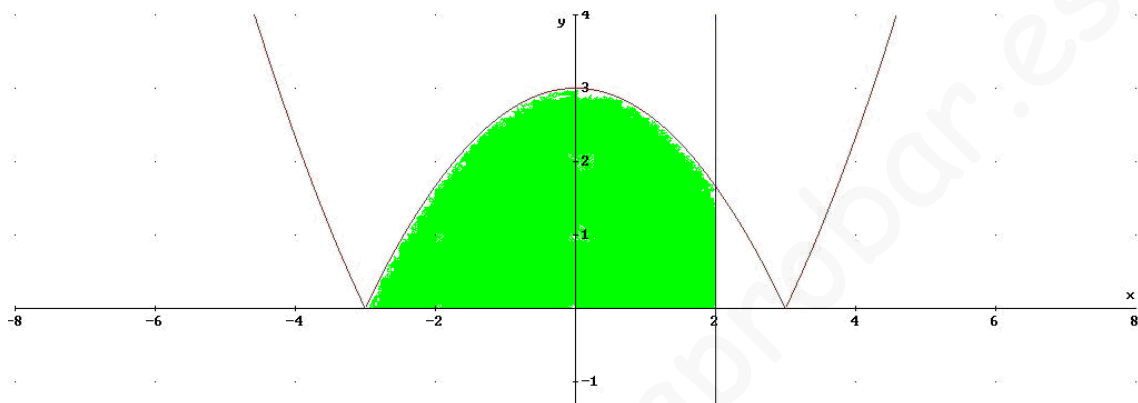
1ª) Integral de la función $f_1(x) = x$ en el intervalo $[2, 3]$

2ª) Integral de la función $f_2(x) = 6 - x$ en el intervalo $[3, 4]$

El área pedida vale:

$$A = \int_2^3 x dx + \int_3^4 (6 - x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right]_2^3 + \left. 6x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} + 24 - \frac{16}{2} - \left(18 - \frac{9}{2} \right) = \frac{14}{2} - 2 = 5 \text{ u}^2$$

15.- Dada la función $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right|$. Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta $x = 2$.



Calculamos los límites de integración (puntos de corte con el eje OX):

$$f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right| = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = \frac{-3}{-\frac{1}{3}} = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Por tanto, el límite inferior de integración es $x = -3$ y el límite superior es $x = 2$, que es la recta que nos dan.

El área pedida es:

$$A = \int_{-3}^2 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3 \right) dx = \left. -\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-3}^2 = \frac{100}{9} \text{ u}^2$$