1	**Determinar las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de las rectas que pasan por el punto A y con el vector de dirección dado:** **a) A(2, 1, -3) $\vec{u}$=(-1, 2, -2)** **b) B(0, 0, 0), $\vec{v}$ = (2, -1, -3)**

SOLUCIÓN:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ $\quad r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$

b) $s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$ $\quad s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$

2	**Escribe en forma paramétricas las rectas:** **a)** $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{2-z}{2}$ **b)** $s \equiv x = y = z$

SOLUCIÓN:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{2-z}{2} \to r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-2} \to r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

b) $s \equiv x = y = z \to s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

3	**Determinar dos puntos pertenecientes a las rectas:** **a)** $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-3y}{3} = 1 - z$ **b)** $s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Para determinar puntos pasamos previamente las rectas a forma paramétricas:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-3y}{3} = 1 - z \to r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y - \frac{2}{3}}{-1} = \dfrac{z-1}{-1} \to r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \frac{2}{3} - t \\ z = 1 - t \end{cases} \to A\left(1, \frac{2}{3}, 1\right), B\left(3, -\frac{1}{3}, 0\right)$

b) $s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = s \end{cases}$ $\to$ P(-1, 2, 0) , Q(1, -1, 1)

4	**Pasar a la forma continua y hallar un vector director de las rectas:** **a)** $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases}$ **b)** $s \equiv \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases} \to r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1} \to \vec{u}$ = (2, -1, 1)

b) $s \equiv \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \\ z = 2t - 2 \end{cases} \to s \equiv x = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{2} \to \vec{v}$ = (1, 2, 2)

5 **Hallar en forma paramétricas y general la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, -2, 2) y con vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$:**

a) $\vec{u}$ (0, -1, 2) y $\vec{v}$ (1, 3, 2) **b) $\vec{u}$ (0, -1, -3) y $\vec{v}$ (-1, 2, -3)**

SOLUCIÓN:

a) $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2 - t + 3s \\ z = 2 + 2t + 2s \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -8(x-1) + 2(y+2) + z - 2 = 0 \rightarrow 8x - 2y - z - 10 = 0$

b) $\alpha \equiv \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -2 - t + 2s \\ z = 2 - 3t - 3s \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 9(x-1) + 3(y+2) - (z-2) = 0 \rightarrow 9x + 3y - z - 1 = 0$

6 **Hallar las ecuaciones paramétricas, ecuación continua y un vector de dirección de la recta:**

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Para obtener las ecuaciones paramétricas resolvemos el sistema:

$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + z = 3y + 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + z = 3y + 1 \\ -2x = -2y + 4 \end{cases} \atop \overline{z = y + 5} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = y - 2 \\ z = y + 5 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 5 + t \end{cases}$

$r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{1} \rightarrow \vec{u} = (1, 1, 1)$

7 **Hallar la ecuación del plano que contenga al punto P(1, 1, 1) y sea paralelo a las rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (1, -2, 0) x (0, 1, -2) = (4, 2, 1)

Vector director de s: $\vec{v}$ = (1, -1, 1)

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3(x-1) - 3(y-1) - 6(z-1) = 0 \rightarrow x - y - 2z + 2 = 0$

8 **Hallar la ecuación del plano que pasa por P(1, 1, 2) y es paralelo a las rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (3, 1, 0) x (4, 0, 1) = (1, -3, -4)

Vector director de s: $\vec{v}$ = (1, -1, 0) x (0, 1, -1) = (1, 1, 1)

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) - 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \rightarrow x - 5y + 4z - 4 = 0$$

9	**Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por A(1, 2, 2) y es paralela a la recta:** $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}}$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (1, 0, -1) x (0, 1, -2) = (1, 2, 1)

La recta queda determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$:

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$$

10	**Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta:** $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}}$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (1, -1, -1) x (1, 1, 1) = (0, -2, 2)

La recta queda determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$:

$$s \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} \to s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

11	**Averiguar si son paralelos los planos de cada uno de los siguientes apartados:** **a)** $\mathbf{\pi_1 \equiv x - y + z = 0 \quad \pi_2 \equiv x - y = 0}$ **b)** $\mathbf{\pi_1 \equiv x + y = 0 \quad \pi_2 \equiv x = 2}$

SOLUCIÓN:

Los planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, o sea, proporcionales:

a) $\vec{n}_1$ = (1, -1, 1) $\vec{n}_2$ = (1, -1, 0) $\to \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{0} \to$ son secantes

b) $\vec{n}_1$ = (1, 1, 0) $\vec{n}_2$ = (1, 0, 0) $\to \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \to$ son secantes

12	**Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:** $\mathbf{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z}$ **y es paralelo al vector de extremos A(2, 0, 0) y B(0, 1, 0)**

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (2, 3, 1) Punto de r P1, 1, 0)

Vector $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 1, 0)

La ecuación del plano queda determinada por el punto P y los vectores de dirección $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -(x-1) - 2(y-1) + 8z = 0 \to x + 2y - 8z - 3 = 0$$

13	**Hallar las ecuaciones de los ejes y planos de coordenadas**

SOLUCIÓN:

Sean los vectores ortonormales:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\text{Eje OX} \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{Eje OY} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{Eje OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Plano xy: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0 \qquad \text{Plano xz: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0 \qquad \text{Plano yz: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = 0$$

14	**Hallar los valores de a para que sean paralelas las rectas:** $$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2a} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -2-2t \\ z = -at \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (a, 2a, 1)$ Vector director de s: $\vec{v} = (-1, -2, -a)$

Para que las rectas r y s sean paralelas deben ser paralelos sus vectores de dirección, o sea, proporcionales:

$$\frac{a}{-1} = \frac{2a}{-2} = \frac{1}{-a} \rightarrow \begin{cases} -2a = -2a \\ a^2 = 1 \end{cases} \rightarrow a = \pm 1$$

Para ningún valor de a las rectas son coincidentes ya que la recta r no pasa por el punto B(0, -2, 0) de la recta s, ya que al sustituir en las ecuaciones de r obtenemos:

$$\frac{-1}{a} = \frac{-2}{2a} \neq 0$$

15	**Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que las contiene.** $$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (1, -2, -1)$ Punto de r: A(2, -2, 1)

Vector director de s: $\vec{v} = (-2, -1, 1)$ Punto de s: B(-3, 2, 0)

Las rectas son coplanarias si el det $\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0 \rightarrow \text{Por tanto, son coplanarias.}$$

La ecuación del plano viene determinada por el punto A (ó B) y los vectores de dirección de r y s:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x-2 & y+2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x-2) - 3(y+2) + 3(z+1) = 0 \rightarrow x + y - z - 1 = 0$$

16	**Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y que corte a las rectas:** $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+2 \end{cases}$ *Sugerencia*: Estudiar previamente la posición relativa entre r y s.

SOLUCIÓN:

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \rightarrow$ Vector director: $\vec{u_r}$ = (2,3, 1) Punto de r: A(1, -2, 0)

$s \equiv \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases} \rightarrow$ Vector director: $\vec{u_s}$ = (2, -1, 1) Punto: B(1, 2, 0)

Las dos rectas son coplanarias si el det $\left(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{AB}\right)$ = 0

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Por tanto, son coplanarias $\rightarrow$ r y s son secantes.

Calculamos el punto de corte, para ello sustituimos las coordenadas de cualquier punto de s en la ecuación de la recta r:

$\frac{1+2t-1}{2} = \frac{2-t+2}{3} = \frac{t}{1} \rightarrow t = \frac{4-t}{3} = t \rightarrow 3t = 4 - t \rightarrow t = 1 \rightarrow$ Punto $r \cap s$: P(3, 1, 1)

Ecuación de la recta dada por el punto P y el vector $\vec{u}$:

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

17	**Determinar si los puntos A(1, 0, 4), B(3, 0, 1), C(2, 0, 0), D(0, 4, 0) son o no coplanarios.**

SOLUCIÓN:

Los puntos A, B, C, D y E son coplanarios si rango $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ = 2

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,0,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,-4) \\ \overrightarrow{AD} = (-1,4,-4) \end{array}\right\} \rightarrow$ Determinamos rang $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ = 3 ya que el determinante es igual a 4 ·(-8+3) = - 20

Por tanto no son coplanarios.

18	**Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-1, -3, 0) y es paralela a la recta:** $s \equiv \begin{cases} x = z+2 \\ y = z-3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Vector director de s: $\vec{u_s}$ = (1, 0, -1) x (0, 1, -1) = (1, 1, 1)

La recta está determinada por el punto A y el vector $\vec{u_s}$:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{0}$$

19 Hallar la ecuación del plano paralelo a –x – 2y + 3z – 7 = 0 que pasa por el punto A(1, 2, -2).

SOLUCIÓN:

El plano tiene como vector normal $\vec{n}$ = (-1, -2, 3)

Ecuación del plano: -(x – 1) – 2(x – 2) + 3(z + 2) = 0 $\rightarrow$ x + 2y – 3z – 11 = 0

20 Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano determinado por el punto (1, -1, 0) y la recta que pasa por el punto (2, 2, 2) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (1,2,3).

SOLUCIÓN

Sea π el plano definido por el punto A(1. -1, 0) y la recta dada por el punto B(2,2,2) y el vector $\vec{u}$ = (1,2,3):

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,2) \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x-1 & y+1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5(x-1) - (y+1) - z = 0 \rightarrow \pi \equiv 5x - y - z - 6 = 0$$

El plano buscado es paralelo a π, por tanto, sus vectores normales son proporcionales.

La ecuación del plano es 5x – z – z = 0.

21 Dadas las rectas r y s averiguar si son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones, estudiamos la solución del sistema.

Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada

Estudiamos el rango de M^*:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4=F4-F2]{F3=F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4=F4-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M = 3 \text{ , rango } M^* = 4$$

Ambas rectas se cruzan.

22 Dadas las rectas r y s averiguar si son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección:

$$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = -z \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones, estudiamos la solución del sistema.

Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada

Estudiamos el rango de M^*:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4=F4-F1]{F3=F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M = 3 \text{ , rango } M^* = 4$$

Ambas rectas se cruzan.

23 **Determinar la posición relativa de las rectas:**

a) $r \equiv x = y = z \qquad s \equiv 2x+1 = 2y = 2z+2$

b) $r \equiv x-1 = y-2 = \dfrac{z-3}{3} \qquad s \equiv \dfrac{x-1}{3} = y-2 = \dfrac{z-2}{2}$

<u>*SOLUCIÓN*</u>

a) Vector director de r : $\overrightarrow{u_r}$ = (1, 1, 1)   Punto de r: A(0, 0, 0)

$$s \equiv 2x+1 = 2y = 2z+2 \rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x-2y+1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \rightarrow \text{Vector director: } \overrightarrow{u_s} = (2, -2, 0) \times (0, 1, -1) = (2, 2, 2)$$

Ambas direcciones son proporcionales $\rightarrow$ r y s son paralelas o coincidentes.

La recta s no pasa por el punto A(0, 0, 0) ya que al sustituir en su ecuación obtenemos: $\begin{cases} 1=0 \\ -1=0 \end{cases}$

Por tanto, ambas rectas son paralelas

b) Vector director de r: $\overrightarrow{u_r}$ = (1, 1, 3)   Punto de r: A(1, 2, 3)

Vector director de s: $\overrightarrow{u_s}$ = (3, 1, 2)   Punto de r: B(1, 2, 3)

Ambas rectas tienen distintas direcciones por ser sus vectores direccionales no proporcionales, además se cortan en el punto (1, 2, 3).

24 **Sean las rectas:**

$$r \equiv \begin{cases} 5z = \alpha(x-3)+10 \\ 5y = x+2 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z-1}{2}$$

a) Demostrar que se cruzan para todo valor de α.

b) Hallar para qué valor de α la recta s es paralela al plano 2x + 3y – z + 1 = 0

<u>*SOLUCIÓN*</u>

$$r \equiv \begin{cases} 5z = \alpha(x-3)+10 \\ 5y = x+2 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} z = \dfrac{\alpha}{5}x + \dfrac{10-3\alpha}{5} \\ y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{5} \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5t \\ y = t + \dfrac{2}{5} \\ z = \alpha t + \dfrac{10-3\alpha}{5} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{u_r} = (5, 1, \alpha) \; A\left(0, \frac{2}{5}, \frac{10-3\alpha}{5}\right)$$

Vector director de s: $\overrightarrow{u_s} = (-5, \alpha, 2)$ Punto: B(1, 0, 1)

Para que se crucen hay que imponer que $\det\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{AB}\right) \neq 0$ siendo $\overrightarrow{AB} = \left(1, -\frac{2}{5}, \frac{3\alpha-5}{5}\right) \rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = (5, -2, 3\alpha-5)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & \alpha \\ -5 & \alpha & 2 \\ 5 & -2 & 3\alpha-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2+\alpha \\ 0 & -3 & 2\alpha-5 \end{vmatrix} = 5\cdot\left(2\alpha^2 - 3\alpha - 5 + 6 + 3\alpha\right) = 5\cdot\left(2\alpha^2+1\right) \neq 0 \quad \rightarrow \text{r y s se cruzan}$$

Para que la recta s sea paralela al plano se debe imponer que $\overrightarrow{u_s} \perp \vec{n}$:

$(-5, \alpha, 2) \cdot (2, 3, -1) = 0 \rightarrow -10 + 3 \; -10+3\alpha-2=0 \rightarrow \alpha = 4$

25	**Para cada número real k se considera el plano π:** $\pi \equiv$ **(2k + 1) x + (1 – k)y + (1 + 3k) z + 2k – 1 = 0** **Demostrar que todos los planos anteriores pasan por una recta r y calcular las ecuaciones paramétricas de dicha recta.**

SOLUCIÓN

(2k + 1) x + (1 – k)y + (1 + 3k) z + 2k – 1 = 0 $\rightarrow$ (x + y + z – 1) + k(2x – y + 3z + 2) = 0

Hemos obtenido la ecuación del haz de planos de arista la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas, resolviendo el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} x+y=1-z \\ 2x-y=-2-3z \end{cases} \\ \hline 3x=-1-4z \end{array} \rightarrow x=\frac{-1-4z}{3} \rightarrow y=\frac{1+4z}{3}+1-z=\frac{4+z}{3}$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$r \equiv x=\frac{-1-4t}{3};\ y=\frac{4+t}{3};\ z=t$$

26	**Determinar la posición relativa de la recta:** $r \equiv \begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+2 \\ z=2t \end{cases}$ **y el plano determinado por los punto A(1, 3, 2), B(2, 0, 1), C(1, 4, 3)**

SOLUCIÓN

Ecuación del plano: $\overrightarrow{AB}$ = (1, -3, -1) $\overrightarrow{AC}$ = (0, 1, 1)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -2(x-1)-(y-3)+(z-2)=0 \rightarrow 2x+y-z-3=0$$

Vector director de r: $\overrightarrow{u_r}$ = (1, 1, 1) Punto de r: A(0, 0, 0)

Vector normal del plano: $\vec{n}$ = (2, 1, -1).

Los vectores no son proporcionales $\rightarrow$ la recta y el plano son secantes.

Para determinar el punto de corte sustituimos las coordenadas de r en la ecuación del plano:

$$2(3t-1)+t+2-2t-3=0 \rightarrow 5t-3=0 \rightarrow t=\frac{3}{5} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

27	**Dadas las rectas:** $$r \equiv \begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases}$$ **a) Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas estén contenidas en un plano.** **b) Determinar p, q para que el plano pase por el punto P(1,1,1)**

<u>*SOLUCIÓN*</u>

a) Pasamos las rectas a forma paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2t + p \\ y = -t + 3 \\ x = t \end{cases} \rightarrow \quad \vec{u_r} = (2, -1, 1) \qquad \text{Punto de r: } A(p, 3, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t + q \\ z = t \end{cases} \rightarrow \quad \vec{u_s} = (-1, 2, 1) \qquad \text{Punto de s: } B(1, q, 0)$$

Para que estén contenidas en un plano hay que imponer que $\det\left(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$, siendo $\overrightarrow{AB}$ = (1– p,q – 3,0):

$$\begin{vmatrix} 1-p & q-3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(1 - p) - 3(q - 3) = 0 \rightarrow q - p = 2$$

b) $\begin{vmatrix} x-p & y-3 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x - p) - 3(y - 3) + 3z = 0 \rightarrow x + y - z - p - 3 = 0$

Como pasa por el punto P(1,1,1) $\rightarrow$ 1 + 1 – 1 – p – 3 = 0 $\rightarrow$ p = -2.

Como q – p = 2, para p = -2 $\rightarrow$ q = 0.

28	**Dadas las rectas:** $$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = -8 \\ 2x + 3y - z = -8 \end{cases}$$ **Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y pasa por el punto A(8, 5, 4).**

<u>*SOLUCIÓN*</u>

Consideramos el haz de planos de arista r:

$\pi_r \equiv x - 2y + z + 1 + k(2x + y - 2z + 2) = 0.$

Calculamos el plano que contiene al punto A: 8 – 10 + 4 + 1+ k(16 + 5 – 8 + 2) = 0 $\rightarrow$ 3 + 15 k = 0 $\rightarrow$ k = -1/5

5(x – 2y + z + 1) – (2x + y – 2z + 2) = 0 $\rightarrow$ 3x – 11y + 7z + 3 = 0

Consideramos el haz de planos de arista s:

$\pi_s \equiv x - y + z + 8 + m(2x + 3y - z + 8) = 0$

Calculamos el plano que contiene al punto A: 8 – 5 + 4 + 8 + m(16 + 15 – 4 + 8) = 0 $\rightarrow$ 3 + 7m = 0 $\rightarrow$

m = - 3/7 $\rightarrow$ 7(x – y + z + 8) – 3(2x + 3y – z + 8) = 0 $\rightarrow$ x – 16y + 10z + 32 = 0

La recta buscada es:

$$\begin{cases} 3x - 11y + 7z + 3 = 0 \\ x - 16y + 10z + 32 = 0 \end{cases}$$

29	**Dadas las rectas:** $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z \qquad s \equiv \begin{cases} y = 2x-1 \\ z = 3 \end{cases}$ **Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y tiene como vector director $\vec{u}$ =(-1, 3, -1).**

SOLUCIÓN

Vector director de r: $\vec{u_r} = (2, 1, 1)$ Punto de r: A(1, 0, 0)

$s \equiv \begin{cases} y = 2x-1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t-1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{u_s} = (1, 2, 0)$ Punto de s: B(0, -1, 3)

Plano determinado por A, $\vec{u_r}$ y $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -4(x-1) + y + 7z = 0 \rightarrow 4x - y - 7z - 4 = 0$$

Plano determinado por B, $\vec{u_s}$ y $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + y + 1 + 5(z-3) = 0 \rightarrow 2x - y - 5z + 14 = 0$$

La recta buscada es: $\begin{cases} 4x - y - 7z - 4 = 0 \\ 2x - y - 5z + 14 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \frac{x-9}{1} = \frac{y-32}{-3} = \frac{z}{1}$

30	**Dadas las rectas:** $r \equiv x = y = z \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ **Hallar la ecuación de la recta que se apoya en r y s y es paralela a t.**

SOLUCIÓN

Vector director de r: $\vec{u_r} = (1, 1, 1)$ Punto de r: A(0, 0, 0)

Vector director de s: $\vec{u_s} = (0, 0, 1)$ Punto de s: B(2, 1, 0)

$t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{u_t} = (1, -1, 1)$

Determinamos el plano paralelo a t y que contiene a r:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2z = 0 \rightarrow x - z = 0$$

Determinamos el plano paralelo a t y que contiene a s:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2 + y - 1 = 0 \rightarrow x + y - 3 = 0$$

La recta buscada es: $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}$

31	**Determinar a y b para que los planos:** $$\begin{cases} \pi \equiv 2x - y + z = 3 \\ \pi' \equiv x - y + z = 2 \\ \pi'' \equiv 3x - y - az = b \end{cases}$$ **se corten en una recta. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto A(2, 1, 3)**

SOLUCIÓN:

Estudiar las posiciones relativas de los tres planos equivale a discutir el sistema.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-F1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1-a & b-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3+F2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-a & b-4 \end{pmatrix}$$

Rango M = 2 si a = -1. $\rightarrow \begin{cases} \text{rang}(M^*) = 2 \text{ si } b = 4 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \text{ si } b \neq 4 \end{cases}$

Por tanto se cortan en una recta si a = -1 y b = 4.
La ecuación de la recta es:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

El haz de planos de arista r es:

$$(2x - y + z - 3) + k(x - y + z - 2) = 0$$

El plano pasa por A(2, 1, 3) $\rightarrow$ (4 – 1+ 3 – 3) + k(2 – 1 + 3 – 2) = 0 $\rightarrow$ k = -3/2.

El plano es: 2(2x – y + z – 3) – 3(x – y + z – 2) = 0 $\rightarrow$ x + y – z = 0

32	**Hallar el valor de k para que los planos:** $$\begin{cases} \pi \equiv x + y + z = 2 \\ \pi' \equiv 2x + 3y + z = 3 \\ \pi'' \equiv kx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$ **tengan una recta común y hallar las ecuaciones paramétricas de dicha recta**

SOLUCIÓN:

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

|M|=14 – 2k = 0 $\rightarrow$ k = 7

Para k = 7, rango M^* = 2 = rango M ya que F3 = 3F2 + F1

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - z \\ 2x + 3y = 3 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = 3 - 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2z \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

33	**Estudiar la posición relativa de los planos:** $$\begin{cases} \pi \equiv mx + y - z = 1 \\ \pi' \equiv 2x - y + mz = 3m \\ \pi'' \equiv x - 2y + (m+1)z = 3m - 1 \end{cases}$$ **según los distintos valores de m.**

SOLUCIÓN:

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -2 & m+1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \\ 1 & -2 & m+1 & 3m-1 \end{pmatrix}$$

|M| = m(-m – 1+ 2m) – 2(m + 1 – 2) + m – 1 = m^2 – 2m + 1 = 0 $\rightarrow$ m = 1.

Para m = 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M^* = 2 = \text{rango } M \rightarrow \text{Se cortan en una recta}$$

Para $m \neq 1$:

rango M^* = 3 = rango M $\rightarrow$ Se cortan en un punto.