Problema 1 *(4 puntos)*Estudia, sgún los valores de m, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuacuiones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ x+ & my+ & 3z = & 3 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

El rango de A no puede cuatro, ya que sólo hay tres incógnitas. Entre los menores encontramos

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right| = 17 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3$, independientemente del valor de m.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$; vamos a calcular el determinante de $\overrightarrow{A}$

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right| = [F_2 - F_1] = \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right| = -12m + 58 = 0$$

$$\Longrightarrow m = \frac{29}{6}$$

Si $m \neq \dfrac{29}{6}$ $\Longrightarrow$Rango$(A) = 3 \neq$Rango$(\overline{A}) = 4$ en este caso se trata de un Sistema Incompatible.

Si $m = \dfrac{29}{6}$ $\Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es Compatible Determinado y, por tanto, tiene solución única.

Por el menor elegido en A, podemos eliminar la segunda ecuación

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{13}{17} \\ \\ y = \dfrac{12}{17} \\ \\ z = \dfrac{2}{17} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

   Averiguar si existe algún valor de a de forma que $A^2 - 3A = -2I$ siendo I la matriz identidad.

2. Sea A cualquier matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$. Probar que A tiene inversa utilizando la ecuación dada para expresar A^{-1} en función de A.

Solución:

1.

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2I$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 49-15a & 7a+a^2-12 & -12-3a \\ 21-6a & 3a+a^2-6 & -3-3a \\ 6+6a & 3a^2+2a-10 & 19-18a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & 3a & -18 \\ 9 & 3a & -9 \\ 9a & 6 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 28-15a & a^2+4a-12 & 6-3a \\ 12-6a & a^2-6 & 6-3a \\ 6-3a & 3a^2+2a-16 & 34-18a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si igualamos todos los términos tenemos que en todas las condiciones se cumple:

$$28-15a=-2 \Longrightarrow a=2$$

2.
$$A^2-3A=-2I \Longrightarrow (A-3I)A=-2I \Longrightarrow -\frac{1}{2}(A-3I)A=I \Longrightarrow$$
$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I)$$

Es fácil comprobar que la multiplicación de A^{-1} por el otro lado cumple la proiedad de inversa:

$$A(-\frac{1}{2}(A-3I))=-\frac{1}{2}A(A-3I)=-\frac{1}{2}(A^2-3A)=I$$

Problema 3 *(3 puntos)*Sea A una matriz $m\times n$

1. ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

2. ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

3. Busca una matriz B tal que $BA=(0\ \ 0)$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $p\times n$, y en el caso de que $p=1$ la matriz resultante BA tendrá de dimensión $1\times m$, que sería una matriz fila.

2. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $m\times p$, y en el caso de que $p=1$ la matriz resultante AB tendrá de dimensión $m\times 1$, que sería una matriz columna, está claro que no es posible para ningún valor que demos a p, un resultado de matriz fila.

3. Para que $BA=(0,0)$ es necesario que B tenga de dimensión 1×3, $B=(a\ \ b\ \ c)$ y tenemos:
$$(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=(a\ \ a+b)=(0\ \ 0)\Longrightarrow a=0,\ \ b=0$$
c puede ser cualquier valor por lo que la matriz $B=(0\ \ 0\ \ c)$.