Problema 1 *(4 puntos)*Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax & +y+ & z= & 2 \\ x & +y+ & az= & 2 \\ -ax & & -z= & -a \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right)$

y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\left|\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right| = 1-a^2=0 \Longrightarrow a=\pm 1$$

- Si $a\neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango(A) $=3=$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a=-1:$ $A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1\neq 0$ y por tanto, el Rango$(A)=2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = -2\neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A})=3.$$

Concluyendo:
Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 1:$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

  $$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z = & 2 \\ -x & - & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 2 \\ x & + & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y = & 2 & -z \\ x & = & 1 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1-\lambda \\ y = & 1 \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \ B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$

   Independientemente del valor de k, luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k.

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

   Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k.

Problema 3 *(3 puntos)*Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad.

Calcular lo que tienen cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

Solución:

Sean x, y, z el dinero de Luis, Juan y Óscar, respectivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2x}{3} = y + \dfrac{x}{3} = z \\ \\ x + y + z = 60 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & 3y & & = & 0 \\ 2x- & & 3z & = & 0 \\ x+ & y & +z & = & 60 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 20 \end{array} \right.$$