Problema 1 *(4 puntos)* Discutir según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z= & 3 \\ 3x+ & 4y+ & \lambda z= & \lambda \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{array}\right)$ y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{array}\right|=\lambda-5=0 \Longrightarrow \lambda=5$$

- Si $\lambda \neq 5 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $\lambda=5:\ A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right|=1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A)=2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay dos columnas iguales, la última y la penúltima, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y= & 1 & -z \\ x+ & 2y= & 3 & -3z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x= & -1+ & h \\ y= & 2- & 2h \\ z= & & h \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$$

1. Calcular $3A\cdot A^t-2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A\cdot X=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución

1. La matriz $A^t=\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A\cdot A^t-2I=3\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right)-2\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{array}\right)$$

2. Tenemos que $|A|=\left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right|=6\neq 0\Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A\cdot X=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$X=A^{-1}\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}\right]}{-2x^2} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$