

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+2y+z = 4 \\ 2x+my-mz = 2 \\ mx-y+2z = -2 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geoméricamente.
2. Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & 4 \\ 2 & m & -m & 2 \\ m & -1 & -2 & -2 \end{array} \right), \quad |A| = -6m^2 + 6 = 0 \quad m = 1, \quad m = -1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución) En este caso los tres planos se cortan dos a dos, pero sin soluciones comunes.

$$\begin{aligned} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{-1}{2} &\neq \frac{2}{-1} \implies \text{Se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{-1}{-1} &\neq \frac{2}{-1} \implies \text{Se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{2}{-1} &\neq \frac{-1}{-1} \implies \text{Se cortan} \end{aligned}$$

$m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 - F_1$, luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

2. Si $m = 1$

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 4 \\ 2x+ & y- & z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & 2 - \lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -a & 2 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix}$ Calcular los valores que debe tomar el parámetro a de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m = 0$.

Solución:

$$|A| = a^2 - 15a + 14 = 0 \implies a = 1, \quad a = 14.$$

$$\text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq 14 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

$$\text{Si } a = 1 \text{ o } a = 14 \implies |A| = 0 \implies \text{no existe } A^{-1}$$

Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 & 2/7 \\ 2/7 & 0 & -1/7 \\ -9/14 & 1/2 & -3/7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Hállense las matrices X cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a+b \\ -c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + c = -a \\ -b + d = a + b \\ c = -c \\ d = c + d \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ d = a + 2b \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a + 2b \end{pmatrix}$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$XA + B = X - C$$

donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA + B = X - C \implies X = -(A - I)^{-1}(C + B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad C + B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x-1 & x+1 \\ 2x & -x & x \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x-1 & x+1 \\ 2x & -x & x \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = x \left(\begin{vmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 1 \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$x^2(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{bmatrix} = x^2(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ x+1 & -x & -x \end{vmatrix} =$$

$$x^2(x-1) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -x & -x \end{vmatrix} = 2x^3(x-1) = 0 \implies x = 1, \quad x = 0$$