Problema 1 Halla tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del primero le restamos seis nos queda la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos 8.

Solución:

Sea x el primer número, sea y el segundo número y sea z el tercer número.

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=\frac{1}{5}z \\ 2x-6=y+z \\ 3y-2z=x-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 5x- & 5y- & z= & 0 \\ 2x- & y- & z= & 6 \\ -x+ & 3y- & 2z= & -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=22 \\ y=18 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x- & y+ & mz= & 1 \\ (m+1)x+ & y- & z= & 0 \\ x+ & 3y- & 5z= & -m \end{array}\right.$$

a) Discutirlo para los distintos valores de m.

b) Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

c) En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x- & y+ & mz= & 1 \\ (m+1)x+ & y- & z= & 0 \\ x+ & 3y- & 5z= & -m \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} m-1 & -1 & m \\ m+1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & -1 & m & 1 \\ m+1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -m \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} m-1 & -1 & m \\ m+1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{array}\right|=3m^2-5m-2$$

$$3m^2-5m-2=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=2\\ m=-1/3\end{array}\right.$$

- Cuando $m\neq 2$ y $m\neq -1/3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A=\text{Rango}\overline{A}=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m=-1/3 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 3 & -5\end{array}\right| = -2\neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A)=2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -4/3 & -1 & -1/3 & 1\\ 2/3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -5 & -1/3\end{array}\right)$$

  El menor $\left|\begin{array}{ccc} -1 & -1/3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -5 & -1/3\end{array}\right| = 1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$

  En conclusión, cuando $m=-1/3 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2\neq\text{Rango}(\overline{A})=3$, luego en este caso el sistema es incompatible.
- Cuando $m=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -5 & -2\end{array}\right)$$

  Como $|A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 3 & 1\end{array}\right| = 4\neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A)=2$ Calculamos los menores de orden 3 de $\overline{A}$:

$$|A_1|=|A|=0,\ \ |A_2|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & -5 & -2\end{array}\right| = 0$$

$$|A_3|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{array}\right| = 0,\ \ |A_4|=\left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -5 & -2\end{array}\right| = 0$$

  Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 3 & 1\end{array}\right| = 4\neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(\overline{A})=2$ En conclusión, cuando $m=2 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A})=2<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos para $m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & 2z= & 1 \\ 3x+ & y- & z= & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & =1-2z \\ 3x+ & y= & z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda \\ y=-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right.$$

c)
- Cuando $m \neq 2$ y $m \neq -1/3 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
- Cuando $m = 2 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan en una recta.
- Cuando $m = -1/3 \Longrightarrow$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.

Problema 3 Sea una A una matriz $m \times n$

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (0 \;\; 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Problema mal diseñado, cuando se habla de orden de una matriz nos referimos a matrices cuadradas.

a) $\underset{1\times m}{B} \cdot \underset{m\times n}{A} \Longrightarrow B$ tiene que tener de dimensión $1 \times m$, como tiene que ser una matriz cuadrada porque el problema habla de orden, la unica posibilidad es que sean ambas matrices de orden uno.

b) $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} \Longrightarrow B$ Sólo es posible si $m = 1$ Por el mismo pensamiento del apartado anterior, estaríamos ante una matriz de orden uno.

c)

$$B \cdot A = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \;\; 0) \Longrightarrow (a \;\; b \;\; c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \;\; 0) \Longrightarrow$$

$a = b = 0$ y c cualquiera $\Longrightarrow B = (0 \;\; 0 \;\; c)$