Problema 1 Discute, en función de los valores de a, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + z = 0 \end{array}\right.$$

(La Rioja (junio 2007))

Solución

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -a & 1 \\ -3 & 2 & 4 & a \\ -1 & a & 1 & 0 \end{array}\right), \quad |A| = 3a^2 - 6a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -a \\ a & -2 & 4 \\ 0 & a & 1 \end{array}\right|}{3(a-1)^2} = \frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2}, \quad y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -a \\ -3 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right|}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2}$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -1 & a & 0 \end{array}\right|}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2}$$

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución). En este caso son dos planos paralelos (π_1 y π_3 mientras que π_2 corta a ambos).

Problema 2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$
2. Para $a = b = c = 1$ calcular B^{10}

(Madrid (junio 2007))

Solución

1.

$$AB = BA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5a+2c = 5a+2b \Longrightarrow b = c \\ 5b+2c = 2a+5b \Longrightarrow c = a \\ 2a+5c = 7c \Longrightarrow a = c \\ 2b+5c = 7c \Longrightarrow b = c \end{array} \right. \Longrightarrow a = b = c$$

Para que se verifique $AB = BA$ se tiene que cumplir $a = b = c$.

2.

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Estudiar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

(Madrid (junio 2007))

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow ||A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.
- Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 4 Un hombre le dice a su esposa: "¿Te has dado cuenta que desde el día de nuestra boda hasta el día del nacimiento de nuestro hijo transcurrieron el mismo número de años que desde el día de nacimiento de nuestro hijo hasta hoy? En el día del nacimiento de nuestro hijo la suma de nuestras edades era de 55 años". La mujer replicó: "Me acuerdo que en ese día del nacimiento de nuestro hijo, tú tenías la edad que yo tengo ahora y además recuerdo que el día de nuestra boda el doble de la edad que tú tenías excedía en 20 años a la edad que yo tengo hoy". Halla las edades actuales de ambos.

Castilla-La Mancha (Junio 2006)

Solución

Sea x edad madre, y edad de la padre y z edad del hijo.

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + 2z = 55 \\ x = y - z \\ 2(y - 2z) = x + 20 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 30 \\ y = 35 \\ z = 5 \end{array} \right.$$