Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m dando una interpretación geométrica:

$$\left\{\begin{array}{c} mx + my - 2z = 3 \\ 2x + my + mz = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 6 \end{array}\right.$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 2$.

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & m & -2 & 3 \\ 2 & m & m & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right), \quad |A| = -2(m^2-7m+6) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = 6$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = 6$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como $\left|\begin{array}{ccc} 6 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right| = 90 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Tenemos Rango$(\overline{A}) = 2 = $ Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Los tres planos se cortan en una recta.

3. - Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 - 3\lambda \\ y = 6 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

   - Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -3/4 \\ z = -3/4 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Consideramos las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \text{ y } B = \left(\begin{array}{cc} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{array}\right)$$

Determina los valores de $a, b, c \in R$ de forma que cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$

(Castilla La Mancha (junio 2010))

Solución:

$$|B| = 2c - ba + 3b - 2a + 6 = 8$$

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + 6 = 4 \Longrightarrow b = -2 \\ b + 2 = 2b + 4 \Longrightarrow b = -2 \\ 2a - 6 + c = a - 1 \Longrightarrow a + c = 5 \\ c = b + 2 + c \Longrightarrow b = -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} b = -2 \\ a + c = 5 \\ 2c - ba + 3b - 2a = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{array}\right.$$

Problema 3 (2 puntos). Sea $A = \left(\begin{array}{cc} x & 3 \\ -2 & y \end{array}\right)$ Halla los valores de las variables x e y para que se cumpla que $A^2 = A$.

(Cataluña (junio 2010))

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2-6=x \\ 3x+3y=3 \\ -2x-2y=-2 \\ -6+y^2=y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-2 \;\; y=3 \\ x=3 \;\; y=-2 \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $A^T \cdot B - A \cdot B^T$
2. Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $A^T \cdot B - A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
2. $AX + BA = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B - BA) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$