Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx- & y- & z= & -3\\ 2x+ & 2y+ & mz= & 5\\ 7x+ & y- & mz= & 1\end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m
2. Resuelve el sistema para $m = 0$ y para aquellos en los que existan infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & -1 & -1 & -3\\ 2 & 2 & m & 5\\ 7 & 1 & -m & 1\end{array}\right);\quad |A| = -3(m^2+3m-4) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = -4$$

- Si $m \neq 1$ o $m \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -1 & -1 & -3\\ 2 & 2 & -4 & 5\\ 7 & 1 & 4 & 1\end{array}\right);\quad |A| = 0,\quad \left|\begin{array}{rr} -4 & -1\\ 2 & 2\end{array}\right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_2| = \left|\begin{array}{rrr} -4 & -1 & -3\\ 2 & 2 & 5\\ 7 & 1 & 1\end{array}\right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible, no tiene infinitas solución.

- Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -3\\ 2 & 2 & 1 & 5\\ 7 & 1 & -1 & 1\end{array}\right);\quad F_3 = 3F_1 + 2F_2$$

Luego el sistema es Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

www.yoquieroaprobar.es

2. Si $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y- & z = & -3 \\ 2x+ & 2y+ & z = & 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\lambda \\ \\ y = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} - & y- & z = & -3 \\ 2x+ & 2y & = & 5 \\ 7x+ & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/4 \\ y = 11/4 \\ z = 1/4 \end{array} \right.$$

Problema 2 Sea A una matriz cuadrada de orden 2, que cumple la propiedad $A^2 = 2A + I$. Se pide:

1. Demostrar que existe la matriz inversa de A y calcularla en función de A.
2. Utilizando la propiedad formulada calcular A^5.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} y A^5 utilizando los resultados obtenidos anteriormente.

Solución:

1. $A^2 = 2A + I \Longrightarrow A^2 - 2A = I \Longrightarrow (A - 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A - 2I$.
2.

$$A^3 = A^2A = (2A + I)A = 2A^2 + A = 2(2A + I) + A = 5A + 2I$$

$$A^4 = A^3A = (5A + 2I)A = 5A^2 + 2A = 5(2A + I) + 2A = 12A + 5I$$

$$A^5 = A^4A = (12A+5I)A = 12A^2+5A = 12(2A+I)+5A = 29A+12I$$

3. Primero hay que comprobar si la matriz A cumple la propiedad inicial $(A^2 = 2A + I)$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Luego A cumple la propiedad:

$$A^{-1} = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = 29\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 29 \\ 58 & 41 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Un bodegero ha obtenido en sus últimas cosechas tres tipos de vino, uno de uva garnacha, otro de cencibel y otro de uva merlot. El vino de garnacha lo venderá a 2 euros el litro, el de cencibel a 3 euros el litro y el de merlot a 8 euros el litro. Desea elaborar 1500 litros que pueda vender a 4 euros el litro, mezclando todos ellos, pero para que el sabor de este vino sea adecuado debe cumplir que la cantidad de vino de uva cencibel tiene que ser el doble que el de vino de uva merlot.
Calcular las cantidades a mezclar de cada tipo de vino.

Solución:

Sean: x litros de vino de uva garnacha, y litros de vino de uva cencibel y z litros de vino de uva merlot.

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1500 \\ 2x + 3y + 8z = 6000 \\ y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 375 \\ y = 750 \\ z = 375 \end{array}\right.$$

www.yoquieroaprobar.es