Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m dando una interpretación geométrica:

$$\left\{\begin{array}{c} mx - my + 2z = 3 \\ 2x + my = m + 1 \\ 4x + 5y - 4z = m - 1 \end{array}\right.$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & -m & 2 & 3 \\ 2 & m & 0 & m+1 \\ 4 & 5 & -4 & m-1 \end{array}\right), \quad |A| = -4(m^2+4m-5) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -5$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -5 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ 4 & 5 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como $\left|\begin{array}{rrr} -5 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{array}\right| = -180 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como:

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \end{array}\right| = 0$$

Tenemos Rango($\overline{A}$) $= 2 =$ Rango(A) $<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Los tres planos se cortan en una recta.

3.
   - Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/3 - (2/3)\lambda \\ y = -4/3 + (4/3)\lambda \end{array}\right.$$

   - Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2z = 3 \\ 2x = 1 \\ 4x + 5y - 4z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 3/5 \\ z = 3/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Indica los valores de m para los que A es invertible.
2. Resuelva la ecuación matricial $XA - B^T = C$ para $m = 0$. (B^T es la matriz traspuesta de B)

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $|A| = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 3$

   Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

   Si $m = 1$ y $m = 3 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}

2. $XA - B^T = C \Longrightarrow X = (C + B^T)A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene como resultado 594. Además, la cifra de las decenas es la media arítmetica entre las otras dos. Hallar dicho número.

(País Vasco (junio 2011))

Solución:

Sea: xyz el n^o que buscamos, es decir, $xyz = 100x + 10y + z$.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=18 \\ 100x+10y+z-100z-10y-x=594 \\ (x+z)/2=y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}\right.$$

El número buscado es el 963.

Problema 4 (2 puntos)

1. Estudiar para que valores de x, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.
2. Dos hermanos de tercero y cuarto de Primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros,todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: "¿De que te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría la mía". ¿Cuántos libros llevaba cada hermano?

(Zaragoza (junio 2010))

Solución:

1. $|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10$

   $$Adj(A) = \begin{pmatrix} -x & -5 \\ 2 & x \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{-x^2+10} & \frac{2}{-x^2+10} \\ -\frac{5}{-x^2+10} & \frac{x}{-x^2+10} \end{pmatrix} = -A = -\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

   $$-x = -\frac{x}{-x^2+10} \Longrightarrow x = \pm 3$$

   Estos valores cumplen las cuatro ecuaciones restantes.

2. Sea x el n^o de libros del hermano mayor e y el n^o de libros del hermano pequeño.

   $$\left\{\begin{array}{c} (x+1)=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \end{array}\right.$$