

**Problema 1** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ m & -1 & m \\ 2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  es inversible.
2. Calcular  $A^{-1}$  para  $m = 2$ .

**Solución:**

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 1 \\ m & -1 & m \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = -(m-1)^3 = 0 \implies m = 1$$

Si  $m = 1 \implies |A| = 0 \implies$  no existe  $A^{-1}$ .

Si  $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies$  existe  $A^{-1}$ .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** Resolver la ecuación matricial  $AX + BX = I$ . Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX + BX = I \implies (A + B)X = I \implies X = (A + B)^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/13 & 1/13 \\ -1/13 & 4/13 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Calcular los valores de  $x$  para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & x-1 & 1 \\ x & 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & 1 & x \\ x-1 & x & x-1 & 1 \\ x & 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - F_1 \\ C_4 - F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1-x & 0 \\ x-1 & 1 & 0 & x-2 \\ x & 1-x & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & x-2 \\ 1-x & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 1-x \\ 1-x & -1 \end{vmatrix} = -x(x-2)^2 \implies x = 0, x = 2$$

**Problema 4** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & a+1 \\ 1 & a & -a & a+1 \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de  $A$  para los diferentes valores de  $a$ .

**Solución:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \implies a = 1, a = -1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & a+1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a & -1 & a+1 \\ 1 & -a & a+1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1)^2 = 0 \implies a = 1, a = -1$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ a & -a & a+1 \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2 = 0 \implies a = 1, a = -1$$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1 \implies \text{Rango}(A) = 3$ . Los valores que anulan los cuatro determinantes son  $a = 1$ ,  $a = -1$ , para cualquier otro valor de  $a$  siempre hay alguno de ellos distinto de cero.

Cuando  $a = 1$  tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Luego cuando  $a = 1 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

Cuando  $a = -1$  tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego cuando  $a = -1 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .