

Problema 1 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1+a)y - (a+6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de a .
2. Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.
3. Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$.

(Madrid Junio 2012) **Solución:**

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a - 1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a + 1 \\ 0 & a & -6 & 3a - 2 \end{array} \right); |A| = a^2 - a - 6 = 0 \implies a = 3, a = -2$$

■ Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema compatible determinado (solución única).

■ Si $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

■ Si $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array} \right); |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

2.

$$\begin{cases} x - y - 4z = -5 \\ 2y - 6z = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. $a = -3$

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

Problema 2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcula matriz inversa de C .

2. Obtén la matriz X que verifica $AX + B^t = C$, siendo B^t la matriz transpuesta de B .

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

1.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

2.

$$AX + B^t = C \implies X = A^{-1}(C - B^t) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad C - B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

1. Hallar la matriz inversa de $A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

2. Hallar la matriz B tal que $A + B = AB$.

(País Vasco Junio 2011)

Solución:

1.

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$A + B = AB \implies B = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Un comerciante vende tres tipos de relojes, A , B y C . Los del tipo A los vende a 200 euros; los del tipo B , a 500 euros, y los del tipo C , a 250 euros. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió ese mes de tipo B fué igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcula cuántos vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fué de 73500 euros.

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

Sea x n° de relojes tipo A , y n° de relojes tipo B y z n° de relojes tipo C .

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 200x + 500y + 250z = 73500 \\ y = x + z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 100 \\ z = 70 \end{cases}$$