Problema 1 (6 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & my+ & z= & m \\ - & 4y+ & mz= & -1 \\ 2x- & 2y+ & 3z= & m \end{array}\right.$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro m.
2. Resolver el sistema para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & -4 & m & -1 \\ 2 & -2 & 3 & m \end{array}\right), \quad |A| = 2(m^2+m-2) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{array}\right| = -4 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right| = -6 \neq 0$$

tenemos Rango$(\overline{A}) = 3$ En este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A})$ y es un Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{array}\right| = -4 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$ y además $F_3 = 2F_1 + F_2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Tenemos que:

Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Tiene infinitas soluciones)

2. Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ - & 4y+ & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/4 - (5/4)\lambda \\ y = 1/4 + (1/4)\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 0 \\ - & 4y & = & -1 \\ 2x- & 2y+ & 3z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 1/4 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, 20 céntimos y 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es de 2,80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de las monedas de 20 céntimos y el número de las monedas de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

Solución:

Sea x el n^o de monedas de 50 céntimos, y el n^o de monedas de 20 céntimos y z el n^o de monedas de 10 céntimos

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 12 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 2,80 \\ y + 1 = z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^n.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$