Problema 1 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my & = & -1 \\ -x+ & my+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & m \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

2. Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & m & 0 & -1 \\ -1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & m \end{array}\right), \quad |A| = 4m - 4 = 0 \quad m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como $F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow$Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El Sistema es Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y & = & -1 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{2}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 En una boda se discute sobre la edad de tres invitados. La suma de sus edades es de 25 años, sabemos que el doble de la edad que tienen entre los dos más pequeños supera en cinco años la edad del mayor. La diferncia de edad entre el mayor y el mediano es de 7 años. Calcular la edad de cada uno de ellos.

Solución:

x edad del pequeño.
y edad del mediano.
z edad del mayor.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=25 \\ 2(x+y)=z+5 \\ z-y=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=8 \\ z=15 \end{array}\right.$$

Problema 3 Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{ccr} 2 & m & -1 \\ 3 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{array}\right)$

1. Encontrar los valores para los que A es inversible.
2. Si $m=-1$ calcular A^{-1}.
3. Si $m=-1$ y tenemos la ecuación matricial $AX=B$ donde $X=\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{l} -1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right)$ calcular los valores de x, y e z.

Solución:

1. $|A|=-m^2+m=0 \Longrightarrow m=0, \quad m=1$

   Si $m=0$ o $m=1 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}.

   Si $m\neq 0$ o $m\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Si existe A^{-1}.

2. $$A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

3. $$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right)$$

Problema 4 Encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2a+c = 2a \Longrightarrow \ c = 0 \\ 2b+d = a+b \Longrightarrow \ a = b+d \\ c = 2c \Longrightarrow \ c = 0 \\ d = c+d \Longrightarrow \ c = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$