Problema 1 *(6 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} kx- & 2y+ & 7z = & 8\\ x- & y+ & kz = & 2\\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de k.
2. Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resúelvase el sistema para $k = 0$.

(Madrid (Junio 2010))

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & k & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2+k+2 = 0 \Longrightarrow k = -1,\ \ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 8\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{rr} -1 & -2\\ 1 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|c_1c_2c_3| = |c_1c_3c_4| = |c_1c_2c_4| = |c_2c_3c_4| = 0$

$\left|\begin{array}{rr} -2 & 7\\ -1 & 2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} + \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

3. Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). En un hipermercado se realiza el recuenta de caja al final de cierto día. En monedas de 10, 20 y 50 céntimos de euro, el importe total obtenido asciende a 500 euros. Por otra parte, se sabe que 200 euros corresponden, conjuntamente, a las monedas de 10 y 20 céntimos. Si en total se cuentan 1800 monedas, ¿cuántas monedas debe haber de 10, 20 y 50 céntimos para que cuadre la cuenta?
(Castilla León (Junio 2010))

Solución:

Sean x el número de monedas de 10 céntimos, y el número de monedas de 20 céntimos y z el número de monedas de 50 euros.

$$\left\{\begin{array}{l} 10x + 20y + 50z = 50000 \\ 10x + 20y = 20000 \\ x + y + z = 1800 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 400 \\ y = 800 \\ z = 600 \end{array}\right.$$

Problema 3 (2 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $A^T \cdot B - A \cdot B^T$
2. Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $A^T \cdot B - A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

2. $AX + BA = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B - BA) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$