Problema 1 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} -5/9 & 1 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XA - XB = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$XA - XB = C \Longrightarrow X = C(A - B)^{-1}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = C(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 7/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -17$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.

Problema 6 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3m^2 - 3m + 6 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -2$$

Si $m = 1$ o $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular $A^{1000} - A^{900}$

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} - A^{900} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 900 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 8 calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a-b \Longrightarrow a = b+d \\ -c = c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = 2c-d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

LLamamos $X = \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$