

## INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.- Calificación máxima:** 2 puntos

Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto  $c \in (-\pi, \pi)$  al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**Ejercicio 2.- Calificación máxima:** 3 puntos

a) (2 puntos). Deriva  $y = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$ .

b) (1 punto). Halla un punto de la gráfica de  $y = x^2 + x + 5$  en el cual la recta tangente sea paralela a la recta  $y = 3x - 8$ .

**Ejercicio 3.- Calificación máxima:** 3 puntos

Sea la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$ .

a) (0,5 puntos). Calcula c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  es horizontal.

b) (1 punto). Para el valor de c encontrado en el apartado anterior, halla a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = -2$  y que corta al eje X en  $x = 1$ .

c) (1,5 puntos). Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

**Ejercicio 4.- Calificación máxima:** 2 puntos

Calcula los siguientes límites:

a) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

b) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1}$

## OPCIÓN B

### **Ejercicio 1.**- Calificación máxima: 2 puntos

Calcula los siguientes límites:

a) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - 4}$       b) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

### **Ejercicio 2.**- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ , determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en su punto de inflexión.

### **Ejercicio 3.**- Calificación máxima: 3 puntos

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + mx^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

- a) (2 puntos). Determina  $m$  y  $n$  para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[-4, 2]$ .
- b) (1 punto). Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

### **Ejercicio 4.**- Calificación máxima: 3 puntos

Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de  $192 \text{ m}^2$  de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima y determina dicha capacidad.

## SOLUCIONES

### OPCIÓN A, Ejercicio A.1

Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto  $c \in (-\pi, \pi)$  al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Para que se verifique el Teorema de Bolzano es necesario que se cumplan dos hipótesis:

Hipótesis 1.- La función f es continua en  $[-\pi, \pi]$ . Los únicos problemas de discontinuidad se pueden presentar en los "puntos de ruptura", es decir, en la intersección de los tramos de función. Obligamos a que sea continua:

- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x^2) = a \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1 \quad (*)$$

- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + x^2) = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b \end{array} \right\} \Rightarrow a + 1 = b \Rightarrow b = 2 \quad (**)$$

Hipótesis 2: El signo de f es distinto en los extremos del intervalo:

$$\left. \begin{array}{l} f(-\pi) = \cos(-\pi) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \frac{2}{\pi} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(-\pi) \neq \text{signo } f(\pi)$$

Bajo esta hipótesis se cumple que  $\exists c \in (-\pi, \pi) / f(c) = 0$ . Pues vamos a calcularlo:

$$f(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos c = 0 & \text{con } -\pi \leq c \leq 0 \Rightarrow \quad (**) \\ 1 + c^2 = 0 & \text{con } 0 < c < 1 \text{ (imposible)} \\ \frac{2}{c} = 0 & \text{con } 1 \leq c \leq \pi \text{ (imposible)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi).$$

### Ejercicio A.2

a) (2 puntos). Deriva  $y = (x + \text{sen } x)^{\sqrt{x}}$ .

b) (1 punto). Halla un punto de la gráfica de  $y = x^2 + x + 5$  en el cual la recta tangente sea paralela a la recta  $y = 3x - 8$ .

a) Al ser una función potencia en la que tanto la base como el exponente son funciones dependientes de x, es preciso aplicar el proceso de derivación logarítmica:

$$y = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \sqrt{x} \cdot \ln (x + \operatorname{sen} x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln (x + \operatorname{sen} x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln (x + \operatorname{sen} x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x} \right] \cdot (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}.$$

b) Tenemos la función  $y = x^2 + x + 5 \Rightarrow y' = 2x + 1$ .

Nos dicen que

$$r_t \parallel y = 3x - 8 \Rightarrow m_{r_t} = 3 \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1.$$

Calculamos su segunda coordenada:

$$y(1) = 1^2 + 1 + 5 = 7$$

y ya tenemos el punto donde la recta tangente es paralela a la recta dada:  $P(1, 7)$ .

$$\text{Su ecuación es } r_t \equiv y - 7 = 3 \cdot (x - 1) \text{ ó } r_t \equiv y = 3 \cdot x + 4$$

### Ejercicio A.3

Sea la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$ .

a) (0,5 puntos). Calcula  $c$  sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  es horizontal.

b) (1 punto). Para el valor de  $c$  encontrado en el apartado anterior, halla  $a$  y  $b$  sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = -2$  y que corta al eje  $X$  en  $x = 1$ .

c) (1,5 puntos). Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

$$\text{a) } f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

Si la recta tangente es horizontal, no tiene inclinación y por lo tanto su pendiente ha de ser cero:

$$m = f'(x) = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$\text{b) } f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx.$$

Imponemos las dos condiciones para sacar el valor de los parámetros:

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (-2)^3 + 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) = 0 \Rightarrow -32 + 12a + 4b = 0 \Rightarrow 3a - b = 8 \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 7 = 0 \Rightarrow a + b + 8 = 0 \Rightarrow a + b = -8 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow f(x) = x^4 - 8x^2 + 7.$$

c) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm 2.$$

Estudiamos el signo de la derivada a ambos lados de los valores que la anulan:

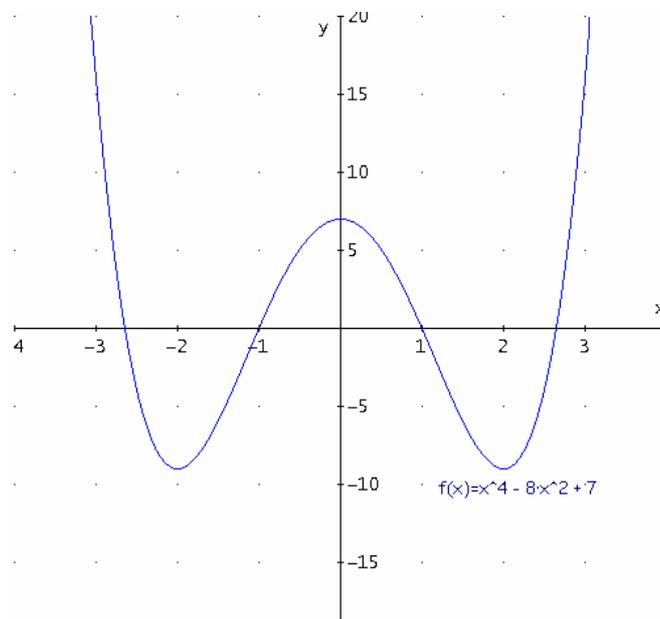
$f'$	-	Mínimo relativo	+	Máximo relativo	-	Mínimo relativo	+
$f$	DECRECIENTE	- 2	CRECIENTE	0	DECRECIENTE	2	CRECIENTE

$f'(-10) < 0$ ;  $f'(1) > 0$ ;  $f'(1) < 0$ ;  $f'(10) > 0$ .

Por lo tanto:

- La función  $f$  es decreciente  $\forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ .
- La función  $f$  es creciente  $\forall x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ .
- La función  $f$  tiene mínimos relativos en los puntos  $(-2, -9)$  y  $(2, 9)$ .
- La función  $f$  tiene un máximo relativo en el punto  $(0, 7)$ .

Su representación gráfica queda determinada por los puntos críticos y por los puntos de corte:



### Ejercicio A.4

Calcula los siguientes límites:

b) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

b) (1 punto).  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{2 \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \text{sen}(x-1)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1) + x \cdot \cos(x-1)}{2 \cdot \frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \text{sen}(x-1) + x^2 \cdot \cos(x-1)}{2} = \frac{1}{2}$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} - 1 \right) (2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \right) (2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5}{x-3} \right) (2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x+5}{x-3}} = e^{10}.$$

## SOLUCIONES

### OPCIÓN B,

#### Ejercicio B.1

Calcula los siguientes límites:

$$a) \text{ (1 punto). } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - 4} \qquad b) \text{ (1 punto). } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

a) Estos límites con radicales se calculan fácilmente multiplicando por la expresión conjugada, aunque, a veces, también puede resultar sencillo aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - 4} & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - 4}{(2x - 4) \cdot (\sqrt{x+2} + 2)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x} - 2}{2(\cancel{x} - 2) \cdot (\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

b) En este caso, utilizamos la propiedad de los límites del número e:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x - 1) \cdot \frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{\cos x}} = e^2$$

#### Ejercicio B.2

Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ , determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en su punto de inflexión.

En primer lugar tenemos que localizar su punto de inflexión y esa información nos la aporta su segunda derivada. Así que, manos a la obra:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x+1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x - e^x}{(e^x)^2} = \frac{-xe^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x}$$

Vamos a por la segunda:

$$f''(x) = \frac{-e^x - (-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x + xe^x}{(e^x)^2} = \frac{(1-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un punto de inflexión:

$f''$	-	<b>Pto. de Inflexión</b>	+
$f$	CONVEXA	1	CÓNCAVA

$$f''(0) < 0; f''(2) > 0$$

Por lo tanto, la función tiene un punto de inflexión en  $(1, 2/e)$ . Ya podemos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto:

$$r_t \equiv y - \frac{2}{e} = f'(1) \cdot (x-1) \Rightarrow r_t \equiv y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (x-1) \quad \text{ó} \quad r_t \equiv y = -\frac{1}{e} \cdot x + \frac{3}{e}$$

### Ejercicio B.3

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + mx^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

- a) (2 puntos). Determina  $m$  y  $n$  para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[-4, 2]$ .
- b) (1 punto). Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

a) Hipótesis 1:  $f$  es continua en el intervalo  $[-4, 2]$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + nx) = 4 - 2n \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^3 + mx^2) = -8 + 4m \end{array} \right\} \Rightarrow -8 + 4m = 4 - 2n \Rightarrow 4m + 2n = 12 \Rightarrow 2m + n = 6 \quad (1)$$

Hipótesis 2:  $f$  es derivable en el intervalo  $(-4, 2)$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + n & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 + 2mx & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 + n \\ f'(-2^+) = 12 - 4m \end{array} \right. \Rightarrow -4 + n = 12 - 4m \Rightarrow 4m + n = 16 \quad (2)$$

$$(2) - (1): 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow n = -4.$$

La función queda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x < -2 \\ x^3 + 5x^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 + 10x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

b) Bajo estas hipótesis, el Teorema del Valor Medio garantiza que

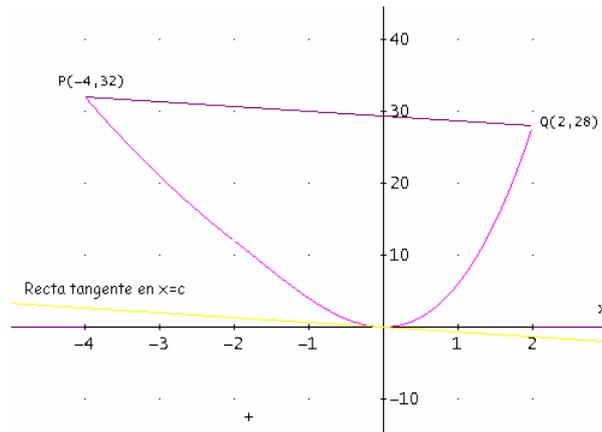
$$\exists c \in (-4, 2) / f'(c) = \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)} = \frac{28 - 32}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Vamos a ver en qué puntos del intervalo  $[-4, 2]$  se verifica:

$$f'(c) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2c - 4 = -2/3 & \text{si } x < -2 \Rightarrow c = 5/3 \notin (-4, -2) \\ 3c^2 + 10c = -2/3 & \text{si } x \geq -2 \Rightarrow 9c^2 + 30c + 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow c = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 72}}{18} = \frac{-30 \pm \sqrt{828}}{18} = \begin{cases} \frac{-5 + \sqrt{23}}{6} \approx -0,068056 \in (-2, 2) \\ \frac{-5 - \sqrt{23}}{6} \approx -3,265277 \notin (-2, 2) \end{cases}$$

Gráficamente, esta es la situación:

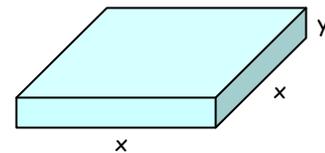


### Ejercicio B.4

Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de  $192 \text{ m}^2$  de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima y determina dicha capacidad.

#### Variables de decisión.

$x \equiv$  Longitud del lado de la base cuadrada de la piscina (m)  
 $y \equiv$  Profundidad de la piscina (m)



Relación entre las variables. (Superficie a recubrir)

$$x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

Función objetivo. (Maximizar su capacidad)

$$f(x, y) = x^2 \cdot y$$

Planteamiento y resolución.

$$\begin{cases} y = \frac{192 - x^2}{4x} & \text{SUSTITUCIÓN} \\ f(x, y) = x^2 \cdot y \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192x - x^3}{4} = 48x - \frac{x^3}{4}$$

Calculamos su derivada para localizar el máximo de la función:

$$f'(x) = 48 - \frac{3x^2}{4}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 48 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow 48 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{48 \cdot 4}{3} = 64 \Rightarrow x = 8$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

$$f''(x) = \frac{-3x}{2}; \quad f''(8) = -12 < 0 \Rightarrow f \text{ alcanza el valor máximo en } x = 8.$$

Calculamos la profundidad de la piscina y el volumen:

$$y = \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192 - 64}{32} = 4; \quad f(8, 4) = 8^2 \cdot 4 = 256$$

Toma de decisión.

La base cuadrada de la piscina debe tener 8 metros de lado y su profundidad ha de ser de 4 metros. De esta forma conseguiremos una capacidad máxima de  $256 \text{ m}^3$  ó  $256.000$  litros.