INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\pi, \pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } 1 \le x \le \pi \end{cases}$$

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 3 puntos

a) (2 puntos). Deriva $y = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$.

b) (1 punto). Halla un punto de la gráfica de $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x - 8$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Sea la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

a) (0,5 puntos). Calcula c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal.

b) (1 punto). Para el valor de c encontrado en el apartado anterior, halla a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -2$ y que corta al eje X en $x = 1$.

c) (1,5 puntos). Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 2 puntos

Calcula los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3} \right)^{2x+1}$

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos
Calcula los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}$ b) (1 punto). $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos
Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si} \quad x < -2 \\ x^3 + mx^2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

a) (2 puntos). Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $\left[-4,2\right]$.
b) (1 punto). Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima y determina dicha capacidad.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\pi, \pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad -\pi \le x \le 0 \\ a + x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \le \pi \end{cases}$$

Para que se verifique el Teorema de Bolzano es necesario que se cumplan dos hipótesis:

Hipótesis 1.- La función f es continua en $\left[-\pi, \pi\right]$. Los únicos problemas de discontinuidad se pueden presentar en los "puntos de ruptura", es decir, en la intersección de los tramos de función. Obligamos a que sea continua:

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (a + x^2) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1 \quad {}^{(*)}$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (a + x^2) = a + 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{b}{x} = b \end{array}\right\} \Rightarrow a + 1 = b \overset{(*)}{\Rightarrow} b = 2$$

Hipótesis 2: El signo de f es distinto en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(-\pi) = \cos(-\pi) = -1 < 0 \\ f(\pi) = \dfrac{2}{\pi} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(-\pi) \ne \text{signo } f(\pi)$$

Bajo esta hipótesis se cumple que $\exists c \in (-\pi, \pi) / f(c) = 0$. Pues vamos a calcularlo:

$$f(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos c = 0 & \text{con} \quad -\pi \le c \le 0 \overset{(**)}{\Rightarrow} \\ 1 + c^2 = 0 & \text{con} \quad 0 < c < 1 \text{ (imposible)} \\ \dfrac{2}{c} = 0 & \text{con} \quad 1 \le c \le \pi \text{ (imposible)} \end{cases}$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \ c = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi).$$

Ejercicio A.2

a) (2 puntos). Deriva $y = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$.

b) (1 punto). Halla un punto de la gráfica de $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x - 8$.

---

a) Al ser una función potencia en la que tanto la base como el exponente son funciones dependientes de x, es preciso aplicar el proceso de derivación logarítmica:

$$y=(x+\operatorname{sen}x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y=\ln(x+\operatorname{sen}x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\cdot\ln(x+\operatorname{sen}x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\operatorname{sen}x)+\sqrt{x}\cdot\frac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\operatorname{sen}x)+\sqrt{x}\cdot\frac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen}x}\right]\cdot(x+\operatorname{sen}x)^{\sqrt{x}}.$$

b) Tenemos la función $y=x^2+x+5 \Rightarrow y'=2x+1$.

Nos dicen que

$r_t \parallel y=3x-8 \Rightarrow m_{r_t}=3 \Rightarrow y'=3 \Rightarrow 2x+1=3 \Rightarrow x=1$.

Calculamos su segunda coordenada:

$y(1)=1^2+1+5=7$

y ya tenemos el punto donde la recta tangente es paralela a la recta dada: $P(1,7)$.

Su ecuación es $r_t \equiv y-7=3\cdot(x-1)$ ó $r_t \equiv y=3\cdot x+4$

Ejercicio A.3

Sea la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$.

a) (0,5 puntos). Calcula c sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal.

b) (1 punto). Para el valor de c encontrado en el apartado anterior, halla a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=-2$ y que corta al eje X en $x=1$.

c) (1,5 puntos). Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

---

a) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7 \Rightarrow f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

Si la recta tangente es horizontal, no tiene inclinación y por lo tanto su pendiente ha de ser cero:

$m=f'(x)=0 \Rightarrow 4\cdot 0^3+3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0$.

b) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+7 \Rightarrow f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$.

Imponemos las dos condiciones para sacar el valor de los parámetros:

$f'(-2)=0 \Rightarrow 4\cdot(-2)^3+3a\cdot(-2)^2+2b\cdot(-2)=0 \Rightarrow -32+12a+4b=0 \Rightarrow 3a-b=8$ (1)

$f(1)=0 \Rightarrow 1^4+a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+7=0 \Rightarrow a+b+8=0 \Rightarrow a+b=-8$ (2)

$(1)+(2) \rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} b=-8 \Rightarrow f(x)=x^4-8x^2+7$.

c) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$f'(x)=4x^3-16x;\quad f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow 4x\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pm 2$.

Estudiamos el signo de la derivada a ambos lados de los valores que la anulan:

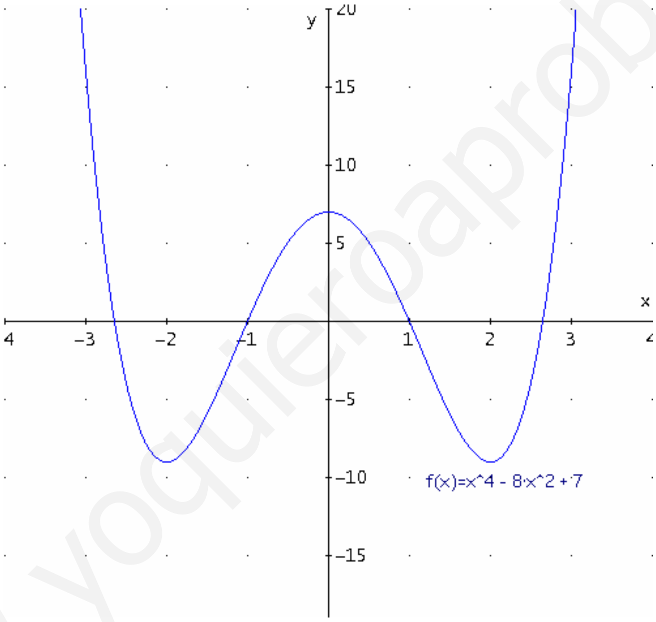
f'	-	**Mínimo relativo**	+	**Máximo relativo**	-	**Mínimo relativo**	+
f	DECRECIENTE	**- 2**	CRECIENTE	**0**	DECRECIENTE	**2**	CRECIENTE

$$f'(-10)<0\,; \qquad f'(1)>0\,; \qquad f'(1)<0\,; \qquad f'(10)>0\,.$$

Por lo tanto:

- La función f es decreciente $\forall x \in (-\infty,-2)\cup(0,2)$.
- La función f es creciente $\forall x \in (-2,0)\cup(2,+\infty)$.
- La función f tiene mínimos relativos en los puntos $(-2,-9)$ y $(2,9)$.
- La función f tiene un máximo relativo en el punto $(0,7)$.

Su representación gráfica queda determinada por los puntos críticos y por los puntos de corte:



Ejercicio A.4

Calcula los siguientes límites:

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$ b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}$

---

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}\underset{\text{L´Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\frac{2\cdot\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\operatorname{sen}(x-1)}{\ln x}\underset{\text{L´Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L´Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)+x\cdot\cos(x-1)}{2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\operatorname{sen}(x-1)+x^2\cdot\cos(x-1)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1} \overset{(1^{\infty})}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}-1\right)(2x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-3}{x-3}\right)(2x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x-3}\right)(2x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10x+5}{x-3}} = \boxed{e^{10}}$.

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Calcula los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}$ b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

----

a) Estos límites con radicales se calculan fácilmente multiplicando por la expresión conjugada, aunque, a veces, también puede resultar sencillo aplicar la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{2x-4}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(2x-4)\cdot(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{2(\cancel{x-2})\cdot(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{2\cdot(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{2\cdot 4} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

b) En este caso, utilizamos la propiedad de los límites del número e:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} \overset{(1^{\infty})}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x-1)\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}} = \boxed{e^{2}}$$

Ejercicio B.2

Dada la función $f: IR \to IR$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{e^{x}}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

En primer lugar tenemos que localizar su punto de inflexión y esa información nos la aporta su segunda derivada. Así que, manos a la obra:

$$f'(x) = \frac{e^{x}-(x+1)\cdot e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{e^{x}-xe^{x}-e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{-xe^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{-x}{e^{x}}$$

Vamos a por la segunda:

$$f''(x) = \frac{-e^{x}-(-x)\cdot e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{-e^{x}+xe^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{(1-x)\cdot e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}} = \frac{1-x}{e^{x}}.$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1.$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un punto de inflexión:

f''	-	**Pto. de Inflexión**	+
f	CONVEXA	1	CÓNCAVA

$$f''(0)<0\,;\ f''(2)>0$$

Por lo tanto, la función tiene un punto de inflexión en (1, 2/e). Ya podemos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función es ese punto:

$$r_t \equiv y-\frac{2}{e}=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow r_t \equiv y-\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}\cdot(x-1) \text{ ó } r_t \equiv y=-\frac{1}{e}\cdot x+\frac{3}{e}.$$

Ejercicio B.3

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si} \quad x<-2 \\ x^3+mx^2 & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

a) (2 puntos). Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4,2]$.

b) (1 punto). Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

---

a) Hipótesis 1: f es continua en el intervalo $[-4,2]$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x^2+nx)=4-2n \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x^3+mx^2)=-8+4m \end{array}\right\}\Rightarrow -8+4m=4-2n\Rightarrow 4m+2n=12\Rightarrow 2m+n=6 \ ^{(1)}$$

Hipótesis 2: f es derivable en el intervalo $(-4,2)$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+n & \text{si} \quad x<-2 \\ 3x^2+2mx & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases};\ \begin{cases} f'(-2^-)=-4+n \\ f'(-2^+)=12-4m \end{cases}\Rightarrow -4+n=12-4m\Rightarrow 4m+n=16 \ ^{(2)}$$

(2) - (1): $2m=10\Rightarrow m=5 \overset{(1)}{\Rightarrow} n=-4$.

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{si} \quad x<-2 \\ x^3+5x^2 & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad x<-2 \\ 3x^2+10x & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

b) Bajo estas hipótesis, el Teorema del Valor Medio garantiza que

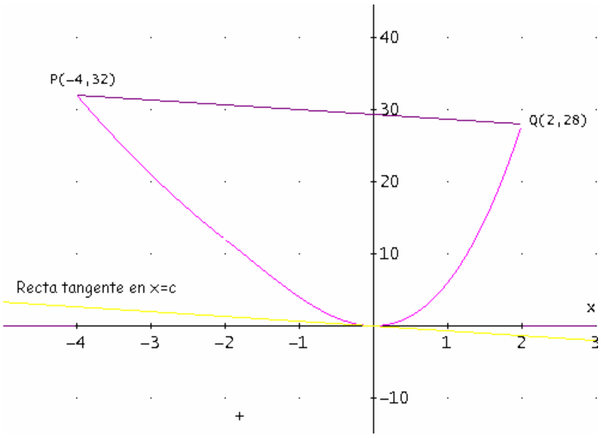
$$\exists c\in(-4,2)\,/\,f'(c)=\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{28-32}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}.$$

Vamos a ver en qué puntos del intervalo $[-4,2]$ se verifica:

$$f'(c)=2\Rightarrow\begin{cases} 2c-4=-2/3 & \text{si} \quad x<-2\Rightarrow c=\cancel{5/3}\notin(-4,-2) \\ 3c^2+10c=-2/3 & \text{si} \quad x\geq -2\Rightarrow 9c^2+30c+2=0\overset{(*)}{\Rightarrow} \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} c=\frac{-30\pm\sqrt{900-72}}{18}=\frac{-30\pm\sqrt{828}}{18}=\begin{cases} \dfrac{-5+\sqrt{23}}{6}\approx -0{,}068056\in(-2,2) \\ \cancel{\dfrac{-5-\sqrt{23}}{6}}\approx -3{,}265277\notin(-2,2) \end{cases}.$$

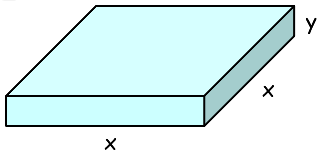
Gráficamente, esta es la situación:



Ejercicio B.4

Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima y determina dicha capacidad.

Variables de decisión.



$x \equiv$ Longitud del lado de la base cuadrada de la piscina (m)
$y \equiv$ Profundidad de la piscina (m)

Relación entre las variables. (Superficie a recubrir)

$$x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

Función objetivo. (Maximizar su capacidad)

$$f(x,y) = x^2 \cdot y$$

Planteamiento y resolución.

$$\begin{cases} y = \dfrac{192 - x^2}{4x} \\ f(x,y) = x^2 \cdot y \end{cases} \overset{\text{SUSTITUCIÓN}}{\Rightarrow} f(x) = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192x - x^3}{4} = 48x - \frac{x^3}{4}$$

Calculamos su derivada para localizar el máximo de la función:

$$f'(x) = 48 - \frac{3x^2}{4}; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 48 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow 48 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{48 \cdot 4}{3} = 64 \Rightarrow x = 8$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

$$f''(x) = \frac{-3x}{2}; \quad f''(8) = -12 < 0 \Rightarrow$$ f alcanza el valor máximo en x = 8.

Calculamos la profundidad de la piscina y el volumen:

$$y = \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{192 - 64}{32} = 4; \quad f(8,4) = 8^2 \cdot 4 = 256$$

Toma de decisión.

La base cuadrada de la piscina debe tener 8 metros de lado y su profundidad ha de ser de 4 metros. De esta forma conseguiremos una capacidad máxima de 256 m^3 ó 256.000 litros.