OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Calcula el valor de los parámetros a, b є IR para que la función $f(x)=(x^2-a)\cdot e^x+bx$ tenga un punto de inflexión en x = 0 y un mínimo relativo en x = 1.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide:

a) (1 punto). Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
b) (1 punto). Calcula los puntos de inflexión de f(x).

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Una caldera tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales vale 100 unidades por metro cuadrado, mientras que a través del techo es de 300 unidades por metro cuadrado. La pérdida por el suelo es tan pequeña que puede considerarse nula. Calcula las dimensiones de la caldera para que la pérdida de calor sea mínima.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 3 puntos

a) (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$, calcula a para que f(x) sea continua en $x=2$. Para el valor obtenido de a, ¿es f(x) derivable en $x=2$?
b) (1,5 puntos) Calcula el valor de m para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}=0$.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos
Sea f: IR $\rightarrow$ IR definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos
Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x \cdot (\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Calcular

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^3 + x^2}$

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Se considera la función f: IR —> IR definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ bx + x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{con } b \in \text{IR}.$$

a) (1 punto). Calcula b para que f sea derivable en $x = 0$.
b) (2 puntos). Para b = -2 y el intervalo $[-2\pi, 3]$, determinar los extremos relativos (máximos y mínimos) y la curvatura.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Calcula el valor de los parámetros a, b ϵ IR para que la función $f(x)=(x^2-a)\cdot e^x+bx$ tenga un punto de inflexión en x = 0 y un mínimo relativo en x = 1.

Mínimo relativo en x = 1.

$$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-a)\cdot e^x+b=(x^2+2x-a)\cdot e^x+b$$

f tiene un mínimo relativo en x = 1 $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow(3-a)\cdot e+b=0\ (*)$

Punto de inflexión en x = 0.

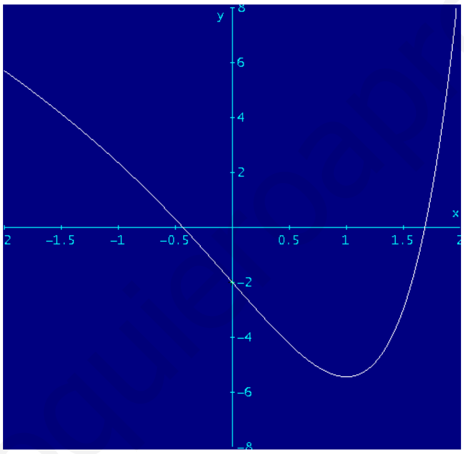
$$f''(x)=(2x+2)\cdot e^x+(x^2+2x-a)\cdot e^x=(x^2+4x+2-a)\cdot e^x$$

f tiene un punto de inflexión en x = 0 $\Rightarrow 2-a=0\Rightarrow$ $a=2$

Sustituimos el valor de a en la expresión $(*)$:

$$(3-2)\cdot e+b=0\Rightarrow b=-e\ \text{(2 puntos)}$$

La función pedida es, $f(x)=(x^2-2)\cdot e^x-e\cdot x$ y su gráfica es



Ejercicio A.2

Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide:

a) (1 punto). Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f(x) tiene pendiente 1.

b) (1 punto). Calcula los puntos de inflexión de f(x).

---

a) ***Puntos en los que la recta tangente tiene pendiente 1.***

$$f'(x)=9+12x-4x^3$$

$m=1\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow 9+12x-4x^3=1\Rightarrow 4x^3-12x-8=0\Rightarrow x^3-3x-2=0$. Aplicando la Regla de Ruffini obtenemos dos soluciones: $x=-1$ y $x=2$. Calculamos sus segundas coordenadas:

$$f(-1)=-9+6-1=-4 \text{ y } f(2)=18+24-16=26.$$

Los puntos pedidos son $P_1(-1,-4)$ y $P_2=(2,26)$. (1 punto)

b) ***Puntos de inflexión.***

$f''(x) = 12 - 12x^2; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 12 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

f''	-	**Punto de Inflexión**	+	**Punto de Inflexión**	-
f	CONVEXA	-1	CÓNCAVA	1	CONVEXA

$$f''(-10) = 12 - 1200 < 0; \quad f''(0) = 12 - 0 > 0; \quad f''(10) = 12 - 1200 < 0$$

Por lo tanto, sus puntos de inflexión son: $P_1(-1, -4)$ y $P_3 = (1, 14)$ (1 punto)

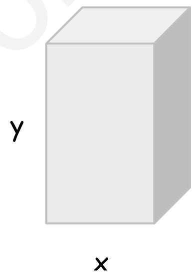
Ejercicio A.3

Una caldera tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales vale 100 unidades por metro cuadrado, mientras que a través del techo es de 300 unidades por metro cuadrado. La pérdida por el suelo es tan pequeña que puede considerarse nula. Calcula las dimensiones de la caldera para que la pérdida de calor sea mínima.

Variables de decisión.

$x \equiv$ Longitud del lado de la base de prisma (m)

$y \equiv$ Altura del prisma (m)



Función pérdida de calor.

$$f(x,y) = 100 \cdot 4 \cdot xy + 300 \cdot x^2 = 400xy + 300x^2$$

Relación entre las variables. *(Volumen)*

$$x^2 \cdot y = 768 \Rightarrow y = \frac{768}{x^2}$$

Planteamiento y resolución.

$$\begin{cases} f(x,y) = 400xy + 300x^2 \\ y = \dfrac{768}{x^2} \end{cases} \overset{\text{SUSTITUCIÓN}}{\Rightarrow} f(x) = 400x \cdot \frac{768}{x^2} + 300x^2 = \frac{307200}{x} + 300x^2$$

Calculamos su derivada para localizar el mínimo de la función:

$$f'(x) = -\frac{307200}{x^2} + 600x; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 600x = \frac{307200}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{512} = 8$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un mínimo:

$$f''(x) = \frac{614400}{x^3} + 600; \quad f''(8) = 720 > 0 \Rightarrow$$ f alcanza el valor mínimo en x = 8.

Toma de decisión.

El lado de la base de la caldera debe medir 8 metros y su altura ha de ser 12 metros. De esta forma se conseguirá una pérdida mínima de calor de 57660 unidades.

$$y = \frac{768}{8^2} = 12; \quad f(8) = \frac{307200}{8} + 300 \cdot 64 = 57660$$ (3 puntos)

Ejercicio A.4

a) (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$, calcula a para que f(x) se a continua en $x=2$. Para el valor obtenido de a, ¿es f(x) derivable en $x=2$?

b) (1,5 puntos) Calcula el valor de m para que $\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}=0$.

---

a) ***Continuidad en x = 2.***

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2}(ax^2+1)=4a+1 \\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2}e^{2-x}=e^0=1\end{array}\right\}\Rightarrow 4a+1=1\Rightarrow \boxed{a=0}$$ (0,75 puntos)

Para $a=0$, tenemos

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<2 \\ -e^{2-x} & \text{si} \quad x>2\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}f'(2^-)=0 \\ f'(2^+)=-e^0=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+)\Rightarrow$ f no es derivable en $x=2$. (0,75 puntos)

b) ***Valor de m.***

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}\overset{L'Hôpital}{\uparrow}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2mx-\operatorname{sen}x}{2x\cdot\cos(x^2)}\overset{L'Hôpital}{\uparrow}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2m-\cos x}{2\cdot\cos(x^2)-4x^2\cdot\operatorname{sen}(x^2)}=\frac{2m-1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}=0\Rightarrow\frac{2m-1}{2}=0\Rightarrow \boxed{m=\frac{1}{2}}$$ (1, 5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Sea f: IR $\to$ IR definida por $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.

Calculamos su primera y segunda derivada:

$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b\Rightarrow f'(x)=6x^2+24x+a\Rightarrow f''(x)=12x+24$

Calculamos la abscisa del punto de inflexión:

$12x+24=0\Rightarrow x=-2$

Como la pendiente de la recta tangente es $m=2\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(-2)=2\Rightarrow 6(-2)^2+24(-2)+a=2\Rightarrow 24-48+a=2\Rightarrow \boxed{a=26}$. (1 punto)

La segunda coordenada del punto de tangencia es

$y(-2)=2\cdot(-2)+3=-1$

Por lo tanto

$f(-2)=-1\Rightarrow 2\cdot(-2)^3+12\cdot(-2)^2+26\cdot(-2)+b=-1\Rightarrow -16+48-52+b=-1\Rightarrow \boxed{b=19}$.

(1 punto)

Ejercicio B.2

Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x \cdot (\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Máximos y mínimos relativos.

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f(x) = x \cdot (\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x) = (\ln(x))^2 + x \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2 \cdot \ln(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \\ \ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada a ambos lados de los valores que la anulan:

f'	+	**Máximo relativo**	-	**Mínimo relativo**	+
f	CRECIENTE	e^{-2}	DECRECIENTE	1	CRECIENTE

$$f'(e^{-3}) = 3 > 0;\ f'(e^{-1}) = -1 < 0;\ f'(10) \approx 9{,}907 > 0$$

Por lo tanto la función tiene un máximo relativo en el punto $(e^{-2}, 4 \cdot e^{-2})$ y un mínimo relativo en el punto $(1, 0)$. (1 punto)

Puntos de inflexión.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2 \cdot \ln(x) \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \cdot (\ln(x) + 1)}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot (\ln(x) + 1)}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Calculamos la tercera derivada y sustituimos el valor:

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 2 \cdot (\ln(x) + 1)}{x^2} = \frac{2 - 2 \cdot (\ln(x) + 1)}{x^2}$$

$$f'''(e^{-1}) = \frac{2 - 2 \cdot (\ln(e^{-1}) + 1)}{e^{-2}} = 2 \cdot e^2 \neq 0.$$

Por lo tanto, la función tiene un punto de inflexión en (e^{-1}, e^{-1}). (1 punto)

Ejercicio B.3

Calcular

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2(2x)}{x^3 + x^2}$

---

a) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5-4}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} =$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\left(\sqrt{x^2-5}+2\right)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

(1 punto)

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}} = e^0 = 1.$

(1 punto)

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{sen^2(2x)}{x^3+x^2} \underset{L'Hôpital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot sen(2x)\cdot 2\cdot \cos(2x)}{3x^2+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot sen(2x)\cdot \cos(2x)}{3x^2+2x} \underset{L'Hôpital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$\underset{L'Hôpital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{4\cdot(2\cos^2(2x)-2sen^2(2x))}{6x+2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4.$$

(1 punto)

Ejercicio B.4

Se considera la función f: IR —> IR definida por:

$$f(x)=\begin{cases} sen\, x & si \quad x\le 0 \\ bx+x^2 & si \quad x>0 \end{cases} \quad \text{con } b\in IR.$$

a) (1 punto). Calcula b para que f sea derivable en $x = 0$.
b) (2 puntos). Para b = -2 y el intervalo $[-2\pi, 3]$, determinar los extremos relativos (máximos y mínimos) y la curvatura.

---

a) ***Continuidad***.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} sen\, x = sen\, 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (bx+x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \text{ f es continua en IR.}$$

Derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si \quad x<0 \\ b+2x & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\cos 0 = 1 \\ f'(0^+) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b=1$$

La función f es derivable en $x=0$ cuando $b=1$. (1 punto)

b) ***Extremos relativos***.

Calculamos la derivada de la función (teniendo en cuenta que no es derivable en $x=0$) y la igualamos a cero:

$$f(x)=\begin{cases} sen\, x & si \quad -2\pi\le x\le 0 \\ -2x+x^2 & si \quad 0<x\le 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \cos x & si \quad -2\pi\le x<0 \\ -2+2x & si \quad 0<x\le 3 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & con \quad -2\pi\le x<0 \Rightarrow x=-3\pi/2;\ x=-\pi/2 \\ -2+2x=0 & con \quad 0<x\le 3 \quad \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores que anulan la primera para determinar qué tipo de extremos relativos son:

$$f''(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad -2\pi \le x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \end{cases}$$

- $f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en $x = -\frac{3\pi}{2}$.
- $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -(-1) = 1 > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{\pi}{2}$.
- $f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{\pi}{2}$.

(1 punto)

Curvatura.

Estudiamos los valores que anulan la segunda derivada y el signo que toma ésta alrededor de ellos:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\operatorname{sen} x = 0 & \text{con} \quad -2\pi \le x < 0 \Rightarrow x = -2\pi; \quad x = -\pi \\ -2 = 0 & \text{con} \quad 0 < x \le 3 \quad \text{(imposible)} \end{cases}$$

f''		-	**Punto de Inflexión**	+		+
f	-2 π	CONVEXA	$-\pi$	CÓNCAVA	0	CÓNCAVA

$$f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) < 0; \quad f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

- La función es convexa $\forall x \in (-2\pi, -\pi)$.
- La función es cóncava $\forall x \in (-\pi, 3)$.
- La función tiene un punto de inflexión en $x = -\pi$.

(1 punto)