INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Obtener para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

a) (1 punto). Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño n. Despeja X de la ecuación $A \cdot X \cdot B = B^2$.

b) (1 punto). Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ.

b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 3 puntos.

a) (2,5 puntos). Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) (0,5 puntos). ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Comprueba que la inversa de A es A^2.
b) (1 punto). Comprueba, también, que $A^{518}=B$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&a\\1&-2&3&1\\0&4&-2&1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3puntos.
Se consideran las matrices de la forma:

$$A(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos x&-\operatorname{sen} x\\0&\operatorname{sen} x&\cos x\end{pmatrix}, \quad x\in \mathrm{IR}.$$

Se pide:
a) (2 puntos). Demuestre que $A(x)$ tiene inversa cualquiera que sea x. Hallar la inversa.
b) (1 punto). Hallar los valores de x tales que $A(x)=I$ (matriz identidad). ¿Es cierto que $A(x)\neq A(y)$ siempre que $x\neq y$?

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos. B1. P 105
a) (1,5 puntos). ¿Para qué valores de k tiene el siguiente sistema alguna solución distinta de la trivial (0, 0, 0)?

$$\begin{cases}kx - y + z = 2x\\ x + 2ky - kz = y\\ x + ky - z = 0\end{cases}$$

b) (1,5 puntos). Resuélvalo en el caso $k=2$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Obtener para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Calculamos las sucesivas potencias del primer sumando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Hacemos lo mismo con el segundo sumando:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & -2^2 \\ -2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & -2^3 \\ -2^3 & 2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$ (2 puntos)

Ejercicio A.2

a) (1 punto). Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño n. Despeja X de la ecuación $A \cdot X \cdot B = B^2$.

b) (1 punto). Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

a) Resolvemos la ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot B = B^2 \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1} \cdot \underbrace{B^2 \cdot B^{-1}}_{B} \Rightarrow \underbrace{I \cdot X \cdot I}_{X} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$ (1 punto)

b) Calculamos la matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, con $|A| = 1$.

Los adjuntos son

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Utilizamos el apartado anterior para calcular la matriz X:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}. \text{ (1 punto)}$$

Ejercicio A.3

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2\\ x + \lambda y - z = 4\\ -\lambda x - y - z = -5\end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ.

b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda=-2$.

---

a) Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius a las matrices asociadas al sistema de ecuaciones:

$$AB=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ -\lambda & -1 & -1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}2\\ 4\\ -5\end{matrix}\right.\right)$$

$$|A|=-\lambda-1+\lambda^2-1=\lambda^2-\lambda-2;\ |A|=0\Rightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\ -1\end{matrix}\right..$$

- Si $\lambda\neq 2, \lambda\neq -1$, $|A|\neq 0\Rightarrow ran(A)=3=ran(AB)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única)

- Si $\lambda=2$, la matriz queda $AB=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & -1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}2\\ 4\\ -5\end{matrix}\right.\right)$. Como $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow ran(A)=2$.

Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -10-2+8+4=0 \Rightarrow ran(AB)=2$. Aplicando el teorema se obtiene: $ran(A)=2=ran(AB) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $\lambda=-1$, la matriz queda

$AB = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow ran(A)=2$.

Además $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5-2+2+4=9 \neq 0 \Rightarrow ran(AB)=3$. Aplicando el teorema se obtiene: $ran(A)=2 \neq ran(AB)=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

(1 punto)

b) Consideramos la matriz asociada al sistema: $AB = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes. Formamos un nuevo sistema haciendo $z=\lambda$:

$AB = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 2 & 4+\lambda \end{array}\right)$

De la primera fila se deduce que $x=2-\lambda$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda fila, se obtiene $2-\lambda+2y=4+\lambda \Rightarrow 2y=2+2\lambda \Rightarrow y=1+\lambda$.

Solución: $(x,y,z)=(2-\lambda,1+\lambda,\lambda)$.

(1 punto)

c) Para $\lambda=-2$, la matriz asociada al sistema queda $AB = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right)$. Como es compatible determinado, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-12}{4} = -3; \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-24}{4} = -6;$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Solución: $(x,y,z)=(-3,-6,5)$.

(1 punto)

Ejercicio A.4

a) (2 puntos). Calcula, en función del parámetro $a \in IR$, las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) (1 punto). ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

---

a) Calculamos el valor del primer determinante de la ecuación aplicando la regla de Sarrus:

$$D_1 = -2x + 2 + 1 - 4x = -6x + 3. \text{ (0,5 puntos)}$$

Para calcular el segundo determinante "hacemos ceros" y desarrollamos por la primera fila:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} \overset{F_1-F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = -x^2 + a. \text{ (1 punto)}$$

Por lo tanto la ecuación se convierte en: $-6x + 3 - (-x^2 + a) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + (3-a) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot(3-a)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{24 + 4a}}{2} = 3 \pm \sqrt{6+a}. \text{ (1 punto)}$$

b) La ecuación tiene solución única si el discriminante es cero $\Rightarrow$ $a = -6$. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Comprueba que la inversa de A es A^2.

b) (1 punto). Comprueba, también, que $A^{518} = B$.

---

a) Si A^2 es la inversa de A, entonces $A^2 \cdot A = I \Rightarrow A^3 = I$. Comprobémoslo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \text{ (1 punto)}$$

b) Al dividir 518 entre 3 se obtiene cociente 172 y resto 2. Aplicando la regla de la división se cumple que $518 = 3\cdot 172 + 2$. Por lo tanto:

$$A^{518} = A^{3\cdot172+2} = \left(A^3\right)^{172} \cdot A^2 = I^{172} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = B \text{ (Apartado anterior). (1 punto)}$$

Ejercicio B.2

Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

- Calculamos el valor del determinante: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -2\end{vmatrix}=4+4+4-12=0\Rightarrow$ Las tres primeras columnas son linealmente dependientes.
- Consideramos el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4\neq 0\Rightarrow$ Las dos primeras columnas son linealmente independientes.
- Completamos el menor con la cuarta columna y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-2+4a-2-4=4a-8$$

  - Si $a\neq 2\Rightarrow ran(A)=3$.
  - Si $a=2\Rightarrow ran(A)=2$.

(2 puntos)

Ejercicio B.3

Se consideran las matrices de la forma:

$$A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & -\operatorname{sen} x\\ 0 & \operatorname{sen} x & \cos x\end{pmatrix},\quad x\in \mathbb{R}.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Demuestre que $A(x)$ tiene inversa cualquiera que sea x. Hallar la inversa.

b) (1 punto). Hallar los valores de x tales que $A(x)=I$ (matriz identidad). ¿Es cierto que $A(x)\neq A(y)$ siempre que $x\neq y$?

----

a) $A(x)$ tiene inversa $\Leftrightarrow$ $|A(x)|\neq 0$. Calculemos su determinante:

$$|A(x)|=\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1\neq 0$$ (0,5 puntos)

Los adjuntos son

$A_{11}(x)=\begin{vmatrix}\cos x & -\operatorname{sen} x\\ \operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}=1$; $\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ \operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}=0$; $\quad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ \cos x & -\operatorname{sen} x\end{vmatrix}=0$;

$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & -\operatorname{sen} x\\ 0 & \cos x\end{vmatrix}=0$; $\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos x\end{vmatrix}=\cos x$; $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -\operatorname{sen} x\end{vmatrix}=\operatorname{sen} x$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & \cos x\\ 0 & \operatorname{sen} x\end{vmatrix}=0$; $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \operatorname{sen} x\end{vmatrix}=-\operatorname{sen} x$; $\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos x\end{vmatrix}=\cos x$

Luego,

$$A^{-1}(x)=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x\\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x\\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x\end{pmatrix}.$$ (1,5 puntos)

b) $A(x)=I \Rightarrow \begin{cases}\cos x=1\\ -\operatorname{sen} x=0\\ \operatorname{sen} x=0\\ \cos x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=1\\ \operatorname{sen} x=0\end{cases} \Rightarrow x=2k\pi \text{ con } k\in \mathbb{N}$. (0,5 puntos)

Ejercicio B.4

a) (1,5 puntos). ¿Para qué valores de k tiene el siguiente sistema alguna solución distinta de la trivial (0, 0, 0)?

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x\\ x + 2ky - kz = y\\ x + ky - z = 0\end{cases}$$

b) (1,5 puntos). Resuélvalo en el caso $k=2$.

---

a) Ordenamos las ecuaciones

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x\\ x + 2ky - kz = y\\ x + ky - z = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)x - y + z = 0\\ x + (2k-1)y - kz = 0\\ x + ky - z = 0\end{cases}$$

y consideramos la matriz asociada al sistema, que resulta ser homogéneo:

$$A=\begin{pmatrix}k-2 & -1 & 1\\ 1 & 2k-1 & -k\\ 1 & k & -1\end{pmatrix}$$

$|A|=(k-2)\cdot(2k-1)\cdot(-1)+k+k-(2k-1)-1+k^2\cdot(k-2)=k^3-4k^2+5k-2$.

Resolvemos aplicando la regla de Ruffini:

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	0
1		1	-2	
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

- Si $\lambda\neq 2, \lambda\neq 1$, $|A|\neq 0 \Rightarrow ran(A)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución trivial: (x, y, z) = (0, 0, 0))
- Si $\lambda=2$ ó $\lambda=1$, $|A|=0 \Rightarrow ran(A)=2<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones).

(1,5 puntos)

b) Para $k=2$, la matriz queda

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$ las dos primeras filas (ecuaciones) son linealmente independientes.

Formamos un nuevo sistema haciendo $z=\lambda$:

$AB=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 3 & 2\lambda \end{array}\right)$

De la primera fila se deduce que $y=\lambda$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda fila, se obtiene $x+3\lambda=2\lambda \Rightarrow x=-\lambda$.

Solución: $(x,y,z)=(-\lambda,\lambda,\lambda)$.

(1,5 puntos)