Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

a) (1,5 puntos). Estudia, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y - k^2 z = k$.

b) (0,5 puntos). ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenadas $O = (0,0,0)$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.

Se consideran las rectas:

$$r: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2} \qquad s: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 3 puntos.

a) (1 punto). Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$ y $|\vec{u}| = 9$. Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.

b) Considera los vectores: $\vec{a} = (2,-1,4)$ y $\vec{b} = (0,3,m)$ con $m \in \mathbb{R}$.
   1. (1 punto). Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
   2. (1 punto). Para $m = 0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

SOLUCIONES

Ejercicio A.1

a) (1,5 puntos). Estudia, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$.

b) (0,5 puntos). ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

----

a) Los vectores normales a los planos son $\vec{n}_{\pi_1}=(1,1,-1)$ y $\vec{n}_{\pi_2}=(1,1,-k^2)$. Analizamos cuándo son paralelos (coordenadas proporcionales):

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-k^2} \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm 1$$

- Si $k \neq \pm 1$, los vectores normales no son paralelos $\Rightarrow$ π_1 y π_2 se cortan en una recta.
- Si $k=1$, los planos son $\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y-z=1 \\ \pi_2 \equiv x+y-z=1\end{array}\right\} \Rightarrow$ π_1 y π_2 son coincidentes.
- Si $k=-1$, los planos son $\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y-z=1 \\ \pi_2 \equiv x+y-z=-1\end{array}\right\} \Rightarrow$ π_1 y π_2 son paralelos.

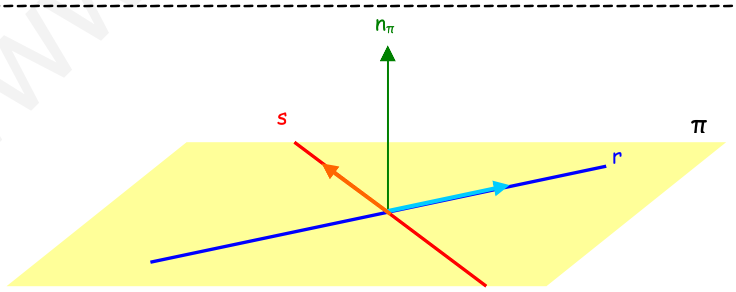
(1,5 puntos)

b) Si $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}=0 \Rightarrow (1,1,-1)\cdot(1,1,-k^2)=0 \Rightarrow 1+1+k^2=0 \Rightarrow k^2=-2$, es decir, no existe solución real y, por lo tanto, π_1 y π_2 no pueden ser perpendiculares.

(0,5 puntos)

Ejercicio A.2

Dados el plano $\pi \equiv 5x-4y+z=0$ y la recta $r: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenadas $O=(0,0,0)$.



Conocemos el vector normal al plano:

$$\pi \equiv 5x-4y+z=0 \Rightarrow \vec{n}_\pi=(5,-4,1)$$

También es sencillo deducir un punto de la recta y un vector director:

$$r \equiv \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{d}_r=(1,2,3) \end{cases}$$

Calculamos un vector director de la recta s:

$$\vec{d}_s = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = (1,2,3)\times(5,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (14,14,-14)$$

Tomamos como vector director $\vec{d}_s = (1,1,-1)$; además $P_s(0,0,0)$, luego:

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad ó \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

También se podría haber conseguido, con otro método, $s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$.

(2 puntos)

Ejercicio A.3

Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2} \qquad s : \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

---

a) Conocemos un punto y un vector director de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,2) \\ \vec{d}_r = (-1,1,-2) \end{cases}; \qquad s \equiv \begin{cases} P_r(5,0,-1) \\ \vec{d}_s = (6,2,2) \text{ ó } \vec{d}_s = (3,1,1) \end{cases}$$

- Calculamos la ecuación del plano π_1 que contiene a r y al origen de coordenadas:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} P_{\pi_1} = O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_r = (3,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OP_r} = (5,0,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -z + 2x + 2x + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 4x + 2y - z = 0$$

- Calculamos la ecuación del plano π_2 que contiene a s y al origen de coordenadas:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} P_{\pi_2} = O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_s = (3,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OP_s} = (5,0,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 5y - x - 5z + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 8y - 5z = 0$$

- La ecuación de la recta t que corta a r y a s, y que contiene al origen de coordenadas es la intersección de los dos planos:

$$t \equiv \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ -x + 8y - 5z = 0 \end{cases}. \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) La distancia entre las rectas r y s es la altura del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$, es decir:

$$\text{dist}(r,s)=\frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}=\frac{\left|\left[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|}=\frac{32}{5\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{2}}{5}\text{ u.}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(5,0,-1)-(0,1,2)=(5,-1,-3)$$

$$\left|\left[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{vmatrix}=3+5+6+10+9-1=32$$

$$\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|=\left|(-1,1,-2)\times(3,1,1)\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\left|(3,-5,-4)\right|=\sqrt{9+25+16}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

(1,5 puntos)

Ejercicio A.4

a) (1 punto). Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17$ y $\left|\vec{u}\right|=9$. Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.

b) Considera los vectores: $\vec{a}=(2,-1,4)$ y $\vec{b}=(0,3,m)$ con $m\in\mathbb{R}$.

1. (1 punto). Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
2. (1 punto). Para $m=0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

---

a) Se trata de una identidad notable, por lo tanto,

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17\Rightarrow\vec{u}^2-\vec{v}^2=17\Rightarrow\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2=17\Rightarrow 81-17=\left|\vec{v}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{v}\right|^2=64\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=8$$

(1 punto)

b) 1. Aplicamos la condición de ortogonalidad (→perpendicularidad):

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow(2,-1,4)\cdot(0,3,m)=0\Rightarrow -3+4m=0\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

(1 punto)

2. El área del paralelogramo es, simplemente, el módulo del producto vectorial:

$$A=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 0\end{matrix}\right\|=\left|(-12,0,6)\right|=\sqrt{(-12)^2+0^2+6^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}\ u^2$$

(1 punto)