INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

Obtener el valor de a para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}=4$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5x^2+4}}$.

a) (1 punto). Calcula la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$.

b) (1 punto). Halla la primitiva F de f que cumple $F(1)=1$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x=0$?
b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x=0$?
c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en km/h) de tráfico en cierta salida de una autovía viene dada por la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20 , \quad 0 \le x \le 7$$

donde x es el número de horas después del mediodía ($x = 0$ corresponde a las 12:00 horas).
Representar gráficamente f(x), para $0 \le x \le 7$, estudiando: los puntos de corte con el eje OY, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en las que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si} \quad x \ge -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

Se pide:
a) (0,5 puntos). Estudiar el dominio y la continuidad de f.
b) (1,5 puntos). Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
c) (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$.

b) (1 punto). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx$.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Obtener el valor de a para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}=4$.

Se trata de una indeterminación del tipo $(1)^{\infty}$ y lo vamos a resolver aplicando la propiedad de los límites del número e:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2}\overset{(1)^{\infty}}{=}4\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)\cdot ax^2}=4\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3-x^2-3}{x^2+3}\right)\cdot ax^2}=4\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6ax^2}{x^2+3}\right)}=4\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow e^{-6a}=4\Rightarrow \ln e^{-6a}=\ln 4\Rightarrow -6a=\ln 4\Rightarrow \boxed{a=-\frac{\ln 4}{6}}\approx\boxed{-0{,}23}.$$

Ejercicio A.2

Sea la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{5x^2+4}}$.

a) (1 punto). Calcula la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$.

b) (1 punto). Halla la primitiva F de f que cumple $F(1)=1$.

---

a) Con unas pequeñas transformaciones vamos a conseguir una función potencia multiplicada, casi, por la derivada de su base:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{5x^2+4}}\,dx=\int_0^2 x\cdot(5x^2+4)^{-1/2}\,dx=\frac{1}{10}\cdot\int_0^2 \underbrace{10x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(5x^2+4)^{-1/2}}_{[f(x)]^n}\,dx=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{(5x^2+4)^{1/2}}{1/2}\right]_0^2=\frac{1}{10}\cdot\left[2\cdot\sqrt{5x^2+4}\right]_0^2=\frac{1}{5}\cdot\left[\left(\sqrt{16}\right)-\left(\sqrt{4}\right)\right]=\frac{1}{5}\cdot(4-2)=\boxed{\frac{2}{5}}.$$

b) Utilizando los cálculos del apartado anterior, tenemos:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{5}\cdot\left[\sqrt{5x^2+4}\right]+k$$

Sólo queda imponer la condición de este apartado:

$$F(1)=1\Rightarrow\frac{1}{5}\cdot\left[\sqrt{5\cdot 1^2+4}\right]+k=1\Rightarrow\frac{3}{5}+k=1\Rightarrow k=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x)}=\frac{1}{5}\cdot\left[\sqrt{5x^2+4}\right]+\frac{2}{5}=\boxed{\frac{2+\sqrt{5x^2+4}}{5}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio A.3

Dada la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

----

a) Asíntotas verticales.

Como se trata de una función racional podrá tener asíntotas verticales en los valores que anulan el denominador. Como

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=-\infty \text{ y } \lim_{x\to -5^+} f(x)=+\infty,$$

f tiene una asíntota vertical de ecuación $x=-5$.

Asíntotas horizontales.

Estudiamos el comportamiento de la función en los extremos:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x-20}{-x+1}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x+1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas.

Al ser el numerador un polinomio de un grado más que el denominador, ya sabemos que va a tener asíntota oblicua y que se calcula fácilmente haciendo la división (su ecuación coincide con el cociente y es la forma más práctica de calcularla). No obstante, nosotros aplicamos teoría "pura y dura" porque queda más "elegante" y "parece que sabemos más":

No puede tener asíntota oblicua por la izquierda (cuando $x\to-\infty$) puesto que tiene rama asintótica horizontal. Veamos qué ocurre por la derecha (cuando $x\to+\infty$):

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+5x-20}{x+5}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x}=\frac{3}{1}=3\Rightarrow m=3\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2+5x-20}{x+5}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-10x-20}{x}=-10\Rightarrow n=-10\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asintótica oblicua por la derecha de ecuación $y=3x-10$.

Hacemos el mismo estudio por la izquierda:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2-5x-20}{-x+5}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x-20}{x^2-5x}=3\Rightarrow m=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(-x)-m(-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-5x-20}{-x+5}+3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x-20}{-x+5}=-10\Rightarrow n=-10$$

Es decir, se trata de la misma recta.

b) Concavidad y convexidad.

Toda esta información nos la ofrece el signo de la segunda derivada, así que, manos a la obra:

$$f'(x)=\frac{(6x+5)(x+5)-(3x^2+5x-20)}{(x+5)^2}=\frac{6x^2+35x+25-3x^2-5x+20}{(x+5)^2}=\frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(6x+30)(x+5)^2-(3x^2+30x+45)\cdot 2(x+5)}{(x+5)^4}=\frac{(6x+30)(x+5)-(3x^2+30x+45)\cdot 2}{(x+5)^3}=$$

$$=\frac{6x^2+60x+150-6x^2-60x-90}{(x+5)^3}=\frac{60}{(x+5)^3}.$$

Se trata de una fracción de numerador positivo y cuyo denominador será positivo cuando x sea mayor que -5 y negativo cuando x sea menor que -5. De esta forma resulta sencillo concluir

- La función f es convexa $\forall x\in(-\infty,-5)$.
- La función f es cóncava $\forall x\in(-5,+\infty)$.

¡Ojo! Que f no tiene punto de inflexión en $x=-5$ aunque cambie la curvatura. Recuerda que es una asíntota vertical.

c) Representación gráfica.

Conocemos sus asíntotas, su comportamiento en los extremos y su curvatura. El estudio lo podemos completar calculando los puntos de corte con el eje X y sus máximos y mínimos relativos.

- Puntos de corte con el eje X.

$$3x^2+5x-20=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+240}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{265}}{6}\approx\begin{cases}+1{,}88\\-3{,}55\end{cases}$$

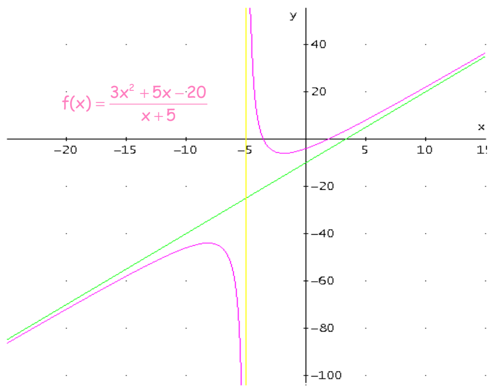
- Máximos y mínimos relativos.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2}=0\Rightarrow 3x^2+30x+45=0\Rightarrow x^2+10x+15=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{100-60}}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{40}}{2}=-5\pm\sqrt{10}\approx\begin{cases}-1{,}83\\-8{,}16\end{cases}$$

Vaya, no han salido muy simpáticos, pero bueno, para eso están las calculadoras. Si consideramos la curvatura, necesariamente el primero ha de ser mínimo y el segundo, máximo. Aproximamos sus segundas coordenadas y hacemos un esbozo de su gráfica.

$f(1{,}32)\approx-6{,}03$; $f(-8{,}16)\approx-43{,}97$



www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio A.4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x=0$?

b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x=0$?

c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?

---

a) Continuidad en x = 0.

Estudiamos sus límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-x}-1\right)=e^0-1=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)=0^2+0=0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(0) \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=0}.$$

Se verifican las dos condiciones de continuidad: coincidencia de los límites laterales (1) y que el valor del límite coincida con el valor de la función en el punto (2).

b) Derivabilidad en x = 0.

Como ya hemos visto en el apartado anterior, se cumple la primera condición de derivabilidad: la función es continua en $x=0$.

Sólo queda comprobar si coinciden las derivadas laterales:

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x<0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=-e^{-0}=-1 \\ f'(0^+)=2\cdot 0+1=1 \end{cases}.$$

Como las derivadas laterales son distintas, no se cumple la segunda condición de derivabilidad, y por lo tanto, $\boxed{f \text{ no es derivable en } x=0}$.

c) Extremos.

Vamos a buscar máximos y mínimos relativos entre los valores que anulan la derivada en cada tramo de la función a trozos:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} -e^{-x}=0 & \text{con} \quad x<0 \Rightarrow -1/e^x=0 & \text{con} \quad x<0 \quad \text{(imposible)} \\ 2x+1=0 & \text{con} \quad x>0 \Rightarrow x=-1/2 & \text{con} \quad x>0 \quad \text{(imposible)} \end{cases}$$

Pues no tiene extremos relativos dentro de cada tramo.

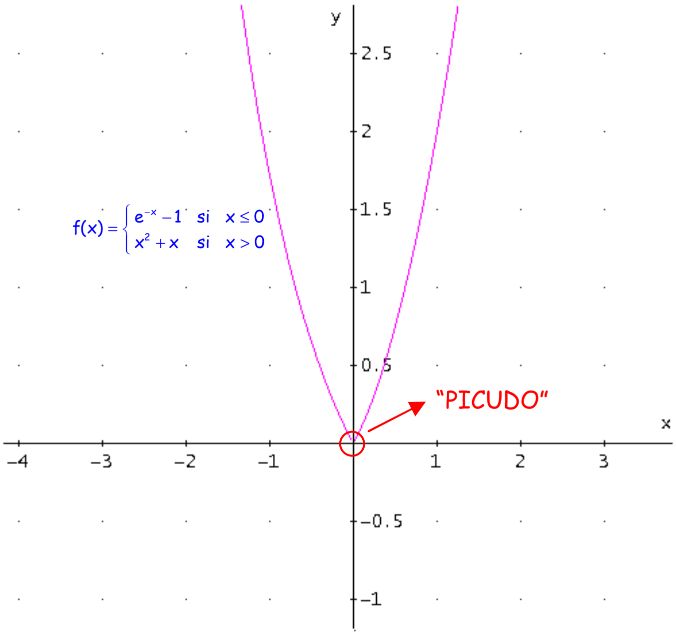
Sólo nos queda comprobar qué ocurre en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x)=-\dfrac{1}{e^x}<0 \quad \forall x<0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } (-\infty,0) \\ f_2'(x)=2x+1>0 \quad \forall x>0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } (0,+\infty) \end{array}\right\}.$$

Anda, resulta que la función cambia de decreciente a creciente en $x=0$, pues no cabe más remedio que concluir que $\boxed{(0,0) \text{ es un mínimo relativo no derivable}}$.

Vamos a hacer una gráfica y comprobamos que, efectivamente, en el origen de coordenadas hay un punto "picudo" o "anguloso", como llamamos coloquialmente en clase a los puntos no derivables:

www.yoquieroaprobar.es



OPCIÓN B

Ejercicio B.1

Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en km/h) de tráfico en cierta salida de una autovía viene dada por la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20\,,\quad 0 \le x \le 7$$

donde x es el número de horas después del mediodía ($x = 0$ corresponde a las 12:00 horas).

Representar gráficamente f(x), para $0 \le x \le 7$, estudiando: los puntos de corte con el eje OY, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en las que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

- Puntos de corte con el eje OY.

Sólo puede tener un punto de corte, en concreto, cuando $x = 0$.

$f(0) = 20 \Rightarrow$ la función corta al eje OY en el punto (0,20).

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos analizar el signo de la derivada:

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60;\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}.$$

f'		+	**Máximo relativo**	-	**Mínimo relativo**	+	
f	0	↗	2	↘	5	↗	7

$f'(1) > 0;\qquad f'(3) < 0;\qquad f'(6) > 0.$

www.yoquieroaprobar.es

- La función f es creciente $\forall x \in (0,2) \cup (5,7)$.
- La función f es decreciente $\forall x \in (2,7)$.

- <u>Concavidad y convexidad</u>.

Estudiamos el signo de la segunda derivada:

$f''(x) = 12x - 42; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 42 = 0 \Rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$.

f'		-	**Punto de Inflexión**	+	
f	0	CONVEXA	$\frac{7}{2}$	CÓNCAVA	7

$f''(1) < 0; \qquad f''(6) > 0$.

- La función f es convexa $\forall x \in \left(0, \frac{7}{2}\right)$.
- La función f es cóncava $\forall x \in \left(\frac{7}{2}, 7\right)$.

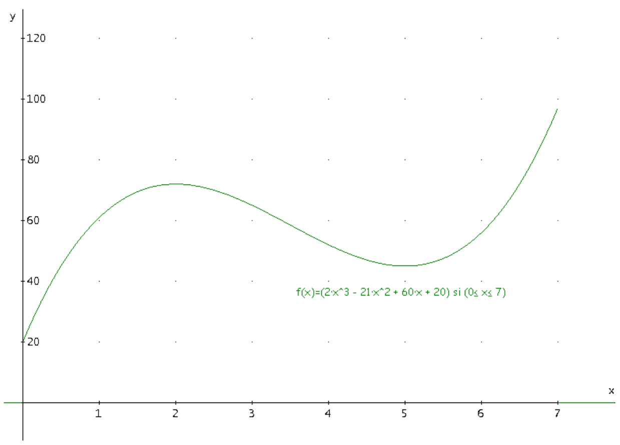
- <u>Máximos, mínimos y puntos de inflexión</u>.

Según el estudio del crecimiento y del decrecimiento de la función:

- La función f tiene un máximo relativo en el punto (2, 72).
- La función f tiene un mínimo relativo en el punto (5, 45).
- La función f tiene un máximo absoluto en el punto (7,97).
- La función f tiene un mínimo absoluto en el punto (0, 20).

En consecuencia,

- La velocidades máximas se alcanzan a las 14:00 horas (máximo relativo, 72 km/h) y a las 19:00 horas (máximo absoluto, 97 km/h).
- La velocidades mínimas se alcanzan a las 17:00 horas (mínimo relativo, 45 km/h) y a las 12:00 horas (mínimo absoluto, 20 km/h).



www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio B.2

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x\geq -1\\[2mm] \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x<-1\end{cases}$$

Se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos). Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y=0$, $x=1$, $x=2$.

---

a) Dominio de definición.

Los valores que anulan el denominador son $x=0$ para $f_1(x)$ y $x=1$ para $f_2(x)$, pero este último no pertenece al dominio de definición de $f_2(x)$, por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{Dom}\,(f)=\mathrm{IR}-\{0\}}.$$

Continuidad.

- $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow\ f \text{ es discontinua en } x=0.$$

- $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{-2}{-1-1}=1\\[2mm] \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=\dfrac{1-3+1}{-1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to -1} f(x)=1=f(-1)\Rightarrow\ f \text{ es continua en } x=-1.$$

- La función f tiene una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x=0$.
- La función f tiene es continua en el resto de valores para los que está definida.

b) Asíntotas verticales.

Como hemos visto en el apartado anterior, la función tiene una asíntota vertical en $\boxed{x=0}$, donde se cumple:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$$

Asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x}{-x-1}=\dfrac{-2}{-1}=2\\[2mm] \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asintótica horizontal por la izquierda de ecuación $\boxed{y=2}$.

www.yoquieroaprobar.es

Asíntotas oblicuas.

No puede tener asíntota oblicua por la izquierda (cuando $x \to -\infty$) puesto que tiene rama asintótica horizontal. Veamos qué ocurre por la derecha (cuando $x \to +\infty$):

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2} = 1 \Rightarrow m = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2+3x+1}{x} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x} = 3 \Rightarrow n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asintótica oblicua por la derecha de ecuación $y = x + 3$.

c) Para calcular el área del recinto debemos saber si la función corta al eje X en el intervalo $(1,2)$:

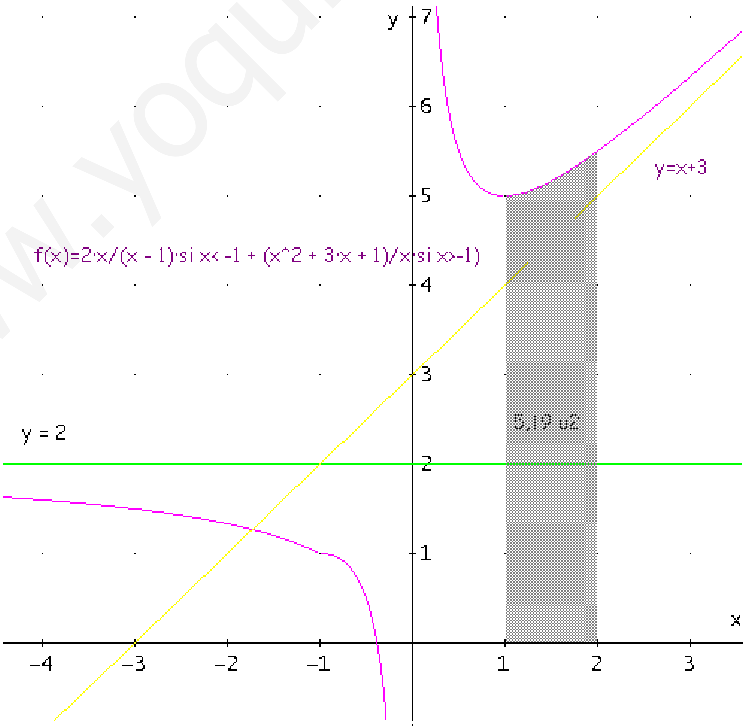
$$f_1(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+3x+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2+3x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} -0{,}38 \notin (1,2) \\ -2{,}61 \notin (1,2) \end{cases}.$$

Además, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{2} > 0$, con lo que el área del recinto coincide con la integral definida:

$$A = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+3+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 3\cdot 2 + \ln 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1 + \ln 1\right) = 2 + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 = \left(\frac{9}{2} + \ln 2\right)u^2 \approx 5{,}19\ u^2.$$

Ahora, como tenemos tiempo, hacemos un dibujo de la función para comprobar que el estudio realizado es coherente. (No puntúa, pero "mola"):



www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio B.3

Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{a/x}$.

b) (1 punto). $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$.

---

a) Pues resulta sencillo si conocemos la propiedad que se aplica para resolver límites del número e y la regla de L´Hôpital; vamos, que se hace en una línea:

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{a/x} \overset{(1)^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x)-1)\cdot\frac{a}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\arctan(x)}{x}} \underset{\text{L´Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+x^2}}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{a}{1+x^2}} = \boxed{e^a}.$$

b) Y este todavía más sencillo si utilizamos la comparación de infinitos. En primer lugar, despreciamos la parte polinómica pues las exponenciales son infinitos de orden superior; y después, al tener el numerador y el denominador exactamente el mismo orden, dividimos sus coeficientes, o simplemente simplificamos e^x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\cancel{e^x}}{5\cdot\cancel{e^x}} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

Ejercicio B.4

Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi x\cdot\cos x\,dx$.

---

a) Con un pedacito de esa habilidad que os caracteriza, podéis convertirla en una integral cuasi inmediata, con aspecto de potencia:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^1 x\cdot(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 -2x\cdot(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[2\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\left[\left(2\sqrt{3}\right)-\left(4\right)\right] = -\sqrt{3}+2 = \boxed{2-\sqrt{3}}.$$

b) Esta otra, a poquita experiencia que tengáis, os tiene que "oler" al método de integración por partes:

$$\int_0^\pi x\cdot\cos x\,dx \overset{(*)}{=} \left[x\cdot\text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x\,dx\right]_0^\pi = \left[x\cdot\text{sen}\,x+\cos x\right]_0^\pi =$$

(*) $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x$

$$= (\pi\cdot\text{sen}\,\pi+\cos\pi)-(0\cdot\text{sen}\,0+\cos 0) = (-1)-(1) = \boxed{-2}.$$

www.yoquieroaprobar.es