SOLUCIONES MÁS ABAJO

Álgebra

1.- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a. Resolverlo cuando sea posible.

$$\begin{aligned} 3x - ay + 2z &= a - 1 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x + 3y - (a-1)z &= 0 \end{aligned}$$

2.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real.

a) Encontrar los valores de λ para los que A B es invertible.
b) Determinar los valores de λ para los que B A es invertible.
c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado?

3.- Resuelve la ecuación matricial A X = B, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

4.- Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, ésta tendrá el doble de monedas que B. Averiguar cuántas monedas había en cada caja.

5.- Halle todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.- Hallar, en función de a, el valor del determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$

7.- Calcular la matriz A sabiendo que se verifica $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8.- a) Estudiar, según los valores del parámetro a,

el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+1)x+2y+z=a+3 \\ ax+y=a \\ ax+3y+z=a+2 \end{cases}$

b) Resolver el sistema en los casos en que resulte ser compatible determinado.

9.- Resuelve la ecuación | A – x I | = 0, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, I la matriz unidad y x un número.

10.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz X que verifica 2 A X = A + 2 B X.

Geometría

1.- Dados los vectores u = (a , 1 + a , 2 a) , v = (a , 1 , a) y w = (1 , a , 1) , se pide:

a) Determinar los valores de a para los que los vectores u , v y w son linealmente dependientes.
b) Estudiar si el vector c = (3 , 3 , 0) depende linealmente de los vectores u , v y w para el caso a = 2. Justificar la respuesta.
c) Justificar razonadamente si para a = 0 se cumple la igualdad u . (v × w).

Nota: el símbolo × significa producto vectorial.

2.- Sean la recta r y el plano π dados por r: $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ π: 2 x – 3 y + z + 1 = 0

a) Calcular el seno del ángulo que forman la recta r y el plano π.
b) Hallar la ecuación d la recta proyección ortogonal de r sobre π

3.- 1) Calcula un punto R de la recta s dada por s ≡ $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-3y-z-7=0 \end{cases}$ que equidiste de los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1,1).

2) Calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R.

4.- Se considera la recta r ≡ $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$. Se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por (0,2,2) y las coordenadas del punto P intersección de r y s.
b) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.
c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, que relación hay entre las distancias de **Q** a **r**, a **s** y a **π**.

5.- Dados el plano π: x + y + a z = b y la recta r: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y+z-4=0 \end{cases}$, calcula a y b de modo que:

i) r y π sean secantes. ¿En qué punto se cortan?
ii) r y π sean paralelos.
iii) r esté contenida en π.

6.- i) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos P = (2,0) y Q = (0,1).
ii) Una circunferencia de longitud 2π que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar geométrico definido en i). Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia.

7.- Sean la recta r: $\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ y el plano π: x – y + z – 5 = 0

a) Hallar un plano que contenga a la recta r y que sea perpendicular a π.
b) ¿Hay algún punto de la recta r cuya distancia al plano π sea igual a $\sqrt{3}$? Averiguar sus coordenadas.
c) Encontrar una recta que corte perpendicularmente a r y que esté contenida en el plano π.

Derivadas

1.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{4x^2+1}$

Calcular la ecuación de sus asíntotas oblicuas.
Estudiar el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos para f.

2.- Sea la función f(x) = 2 x + sen 2x.

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

3.- . Se considera la función $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$. Encontrar a , b y c sabiendo que la gráfica de f tiene las siguientes propiedades:

i) Pasa por el punto (0,4)
ii) Tiene un extremo en x = 1.
iii) Tiene una inflexión en x = - 1.

Encontrar los máximos y mínimos de f y representarla gráficamente.

4.- Dada la función $f(x) = e^x\,(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$, se pide estudiar:

a) Dominio y asíntotas.
b) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
c) Concavidad y convexidad.
d) Dibujar la gráfica de f y sus asíntotas.

5.- Se considera la curva: $y=\dfrac{e^x(x+1)}{x}$. Se pide:

a) Determine el dominio de definición y los cortes con los ejes.
b) Encuentre las asíntotas y las regiones de existencia de la curva.
c) Determine sus máximos y mínimos relativos.
d) Haga una representación gráfica aproximada de la misma.

6.- Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar el área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.
b) Escribir el dominio de la función A(x) y dibujar su gráfica.
c) Hallar el valor máximo de dicha función.

7.- Se define la función f del modo siguiente: $f(x)=\begin{cases}\ln x-1 & si\ \ x>1\\ 2x^2+ax+b & si\ \ x\le 1\end{cases}$

Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas. Estudiar su derivabilidad y hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX. (NOTA: ln significa logaritmo neperiano)

8.- Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}$

9.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2+nx & si\ \ x<-2\\ x^3+m & si\ \ x\ge -2\end{cases}$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-4,2].
b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

10.- Sea f(x) = $\begin{cases}\ln(-x)-1 & si\ \ x<-1\\ x^2+2x & si\ \ -1\le x\le 0\\ -x^2+2x & si\ \ x>0\end{cases}$

Estudiar la aplicabilidad a f(x) de los siguientes teoremas en los intervalos que se indican y encontrar los puntos correspondientes:

a) Teorema de Bolzano en $[-e^2, 3]$
b) teorema de Rolle en $[-e^2, 1]$
c) teorema del Valor Medio en [- 1 , 1]

11.- Sea $f(x) = x \cdot e^{2x}$

a) Hallar sus extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.
b) Encontrar sus asíntotas horizontales.
c) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de f(x) entre x = -1 y x = 1.

12.- Sea $y=f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$

a) Hallar sus intervalos de crecimiento y extremos relativos.
b) Analizar la curvatura de f(x) y encontrar sus puntos de inflexión.
c) Calcular sus asíntotas.

Integrales

1.- Hallar el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{4}{9+2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

2.- Encuentre el valor del coeficiente k de manera que el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + k$ y el eje de abscisas sea igual a 36 u^2.

3.- Dibujando las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$, $h(x) = e^2$, calcular el área del recinto limitado por las mismas.

4.- Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.
Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

5.- Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$ e $y = 8x$. Hallar el área de ese recinto.

6.- Sea $y = x^2 + 2x + 2$. Halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

7.- Calcular: $\int x \ln(1+x^2)\, dx$

8.- Determinar la función f(x) sabiendo que $f''(x) = x \cdot \ln x$, $f'(1) = 0$ y $f(e) = e/4$.

9.- Resolver las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{sen\, x}{(m+n\cos x)^2}\, dx \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\, dx$$

10.- De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)\, dx = \dfrac{5}{4}$.
Calcula a , b , c y d.

11.- Calcular $\int_0^2 |2x-1|\, dx$

12.- Calcular la integral $I = \int \dfrac{x^2+4}{x^2-5x+4}\, dx$

Álgebra

1. ► si $2 \neq a \neq 5$ sist. comp. determinado.

$$x = \frac{2a-5}{5-a} \quad , \quad y = \frac{a}{5-a} \quad , \quad z = \frac{5}{5-a}$$

Si a = 2 , sistema compatible indeterminado

$$x = \frac{3-4\lambda}{11} \quad , \quad y = \frac{5\lambda - 1}{11} \quad , \quad z = \lambda$$

Si a = 5 , sistema incompatible

2. ► a) todos excepto –2 , ½
   b) ninguno, porque |B.A| = 0
   c) no (es un sistema de 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones)

3. ► $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

4. ► 19 , 11 y 6.

5. ► $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. ► $\Delta = a\,(a-2)^3$

7. ► $A . = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

8. ► a) a = -1 compatible indeterminado , $a \neq -1$ compatible determinado.
b) x = 1 , y = 0 , z = 2.

9. ► x=1 , x=3 , x=-1.

10. ► $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Geometría

►1.- a) a = 0 , a = 1 , a = -1

b) Sí, porque u , v y w forman base para a =2

c) Sí: u.(v x w) = | u , v , w | = 0

►2.- a) $\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

b) r’: $(4\lambda \quad \lambda \quad -1-5\lambda)$

►3.- 1) R $\left(9/2 \, , -1/2 \, , -1\right)$

2) área = $1/2\sqrt{66}\ u^2$

►4.- a) s : $(0 \, , \lambda \, , \lambda)$ y P (0 , 1 , 1)

b) $\pi : 2x + y - z = 0$, t : $(2\lambda \, , 1+\lambda \, , 1-\lambda)$

c) d (Q , r) = d (Q , s) = d (Q , π) = d (Q , P)

►5.- i) $a \neq 0$, $\forall b$ $P(\dfrac{b-2}{2a}, \dfrac{2+4a-b}{2a} \, , \dfrac{b-2}{a})$

ii) a = 0 , b $\neq$ 2

iii) a = 0 , b = 2

►6.- i) r : y = 2 x - $3/2$

ii) C$\left(\dfrac{6\pm\sqrt{11}}{10} \, , 2.\dfrac{6\pm\sqrt{11}}{10} - \dfrac{3}{2}\right)$

►7.- a) x + y – 2 = 0

b) Hay dos: R (6 , -4 , -2) y R’(0 , 2 , 4)

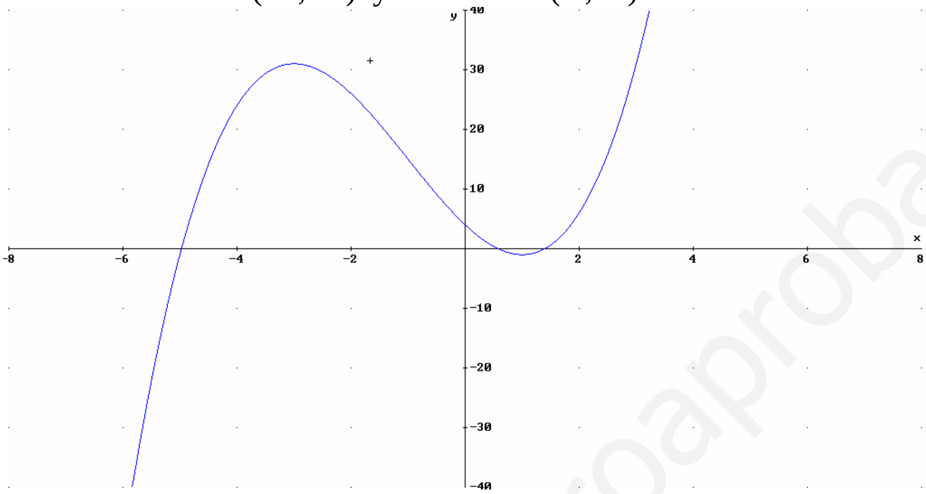
c) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases}$

Derivadas

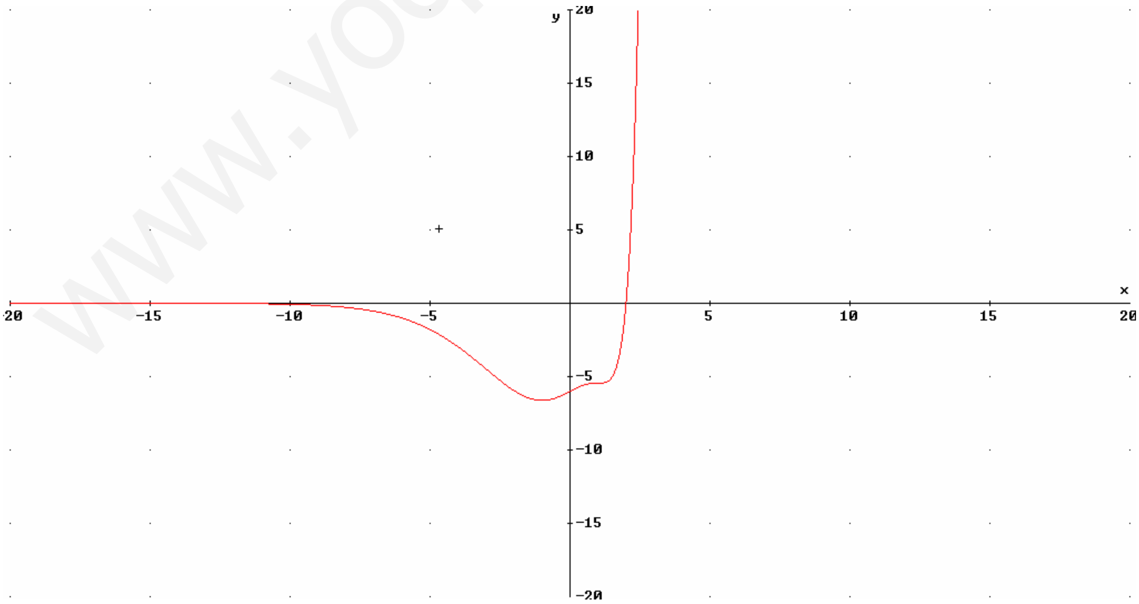
►1.- asíntota oblicua $y = \frac{x}{4}$. Es siempre creciente (no hay extremos).

►2.- a) No tiene ninguna asíntota.
b) $y' \geq 0 \ \forall x$, es creciente en todo R , no hay extremos (Máximos ni mínimos)

►3.- a = 3 , b = - 9 , c = 4
Máximo en (-3 , 31) y mínimo en (1 , -1)



►4.- a) Dominio = R ; asíntota horizontal (sólo por $-\infty$): y = 0
b) decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en (-1 , 1) y en $(1, \infty)$; hay un mínimo en (-1 , -7)
c) convexa en $(-\infty, -3)$ y en (0 , 1) y cóncava en (- 3 , 0) y en $(1, \infty)$



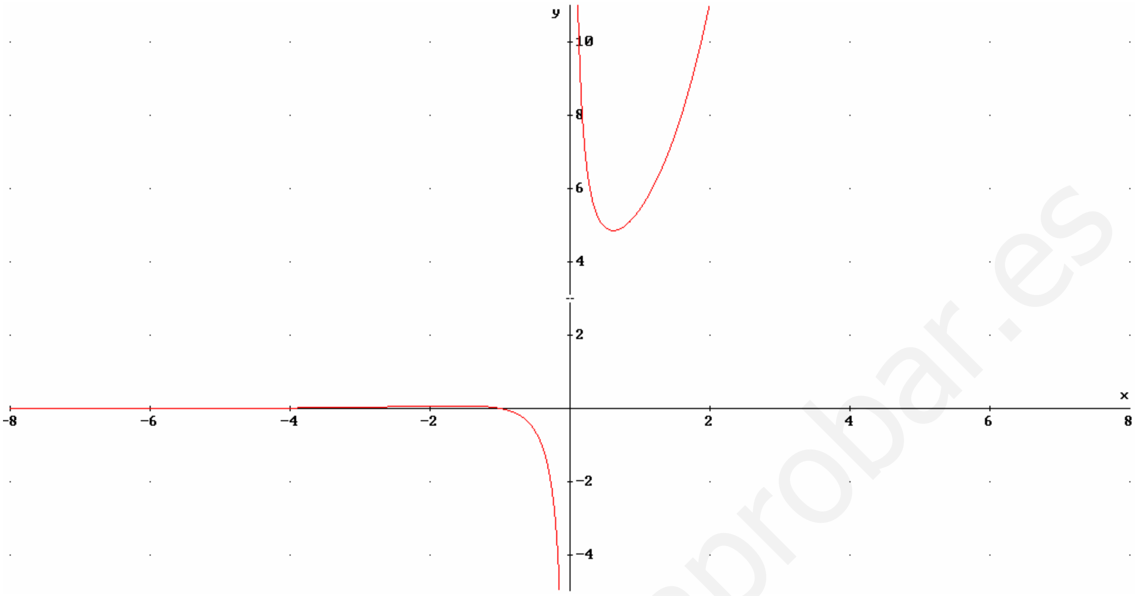
►5.- a) Dominio = R – {0}; puntos de corte con los ejes: (-1,0).

b) Asíntotas horizontales: y = 0 (sólo por $-\infty$); vertical: x = 0

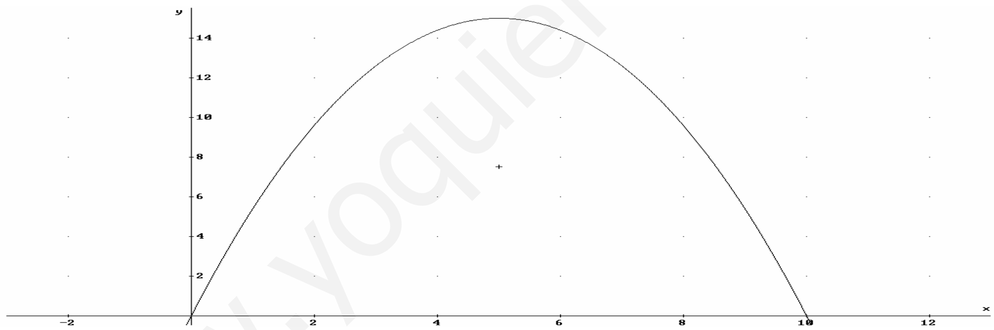
$$\lim_{x\to 0^-} f = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f = +\infty$$

c) Máximo (-1’6180 , 0’076) ; mínimo (0’618 , 4’86).

d)



►6.- a) $A = x.\left(6 - \frac{3}{5}x\right)$ b) $x \in (0\ ,\ 10)$ c) Máximo en x = 5 , A = 15 u^2



►7) a = -3 , b = 0. Con esos valores sí es derivable en todo R (y en particular en x = 1). La tangente es horizontal en $x = {}^{3}\!/_{4}$, $y = -{}^{9}\!/_{8}$.

►8.- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2x^2} = \frac{3}{4}$

►9.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + n\,x & si\ \ x < -2 \\ x^3 + m & si\ \ x \geq -2 \end{cases}$

a) m = - 20 , n = 16

b) en c = $\pm\sqrt{2}$ f’(c) = 6.

►10.- a) x = -e , x = 0 , x = 2

b) No es aplicable pese a que $f(-e^2) = f(1) = 1$ (no existe f' en –1)

c) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

►11.- a) mínimo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$; punto de corte (0 , 0)

b) sólo existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ (y = 0)

c) Área = $\int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{1} f = \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{2}$

►12.- a) decrece en (-∞ , -2) y en (2 , ∞). Crece en (-2 , 2). Mínimo en (-2,0).
b) La gráfica es convexa (vista desde arriba, desde $y \Rightarrow +\infty$) en (-∞ , -4) y cóncava en (-4 , 2) y en (2 , ∞). Hay un punto de inflexión en $\left(-4, \frac{1}{9}\right)$.
c) Asíntota horizontal en y = 1. Asíntota vertical en x = 2.

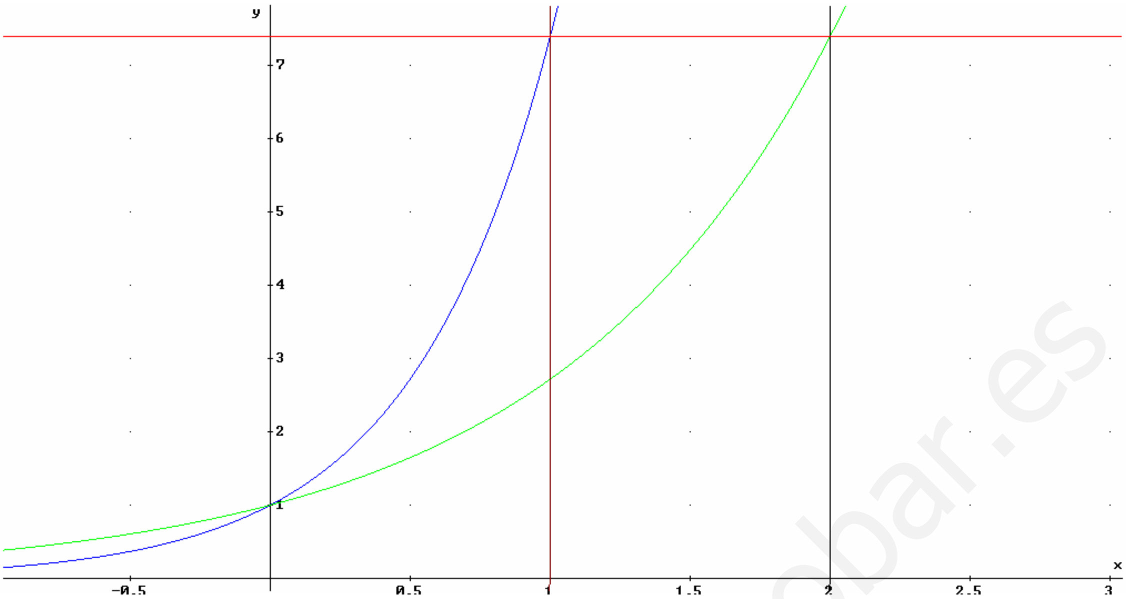
Integrales

►1.- Puntos de inflexión $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

Área = $\int_{-\sqrt{6}/2}^{\sqrt{6}/2} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{6}/2} f(x)\,dx = \frac{2\pi\sqrt{2}}{9}$ u^2 G(x) = $\frac{4}{3\sqrt{2}} arc\,tg \frac{x\sqrt{2}}{3}$

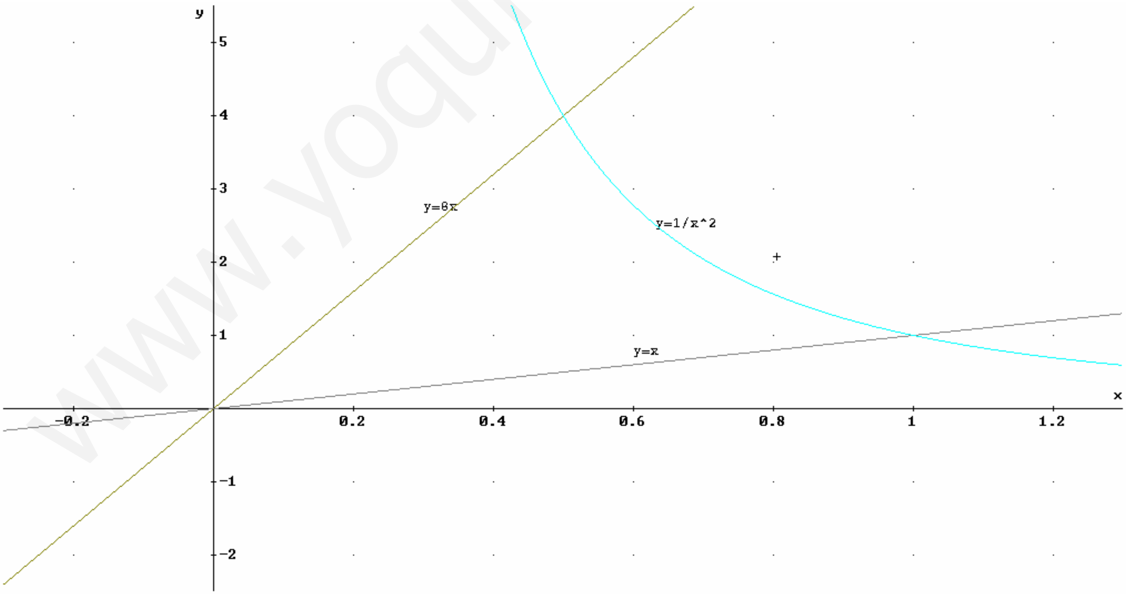
►2.- $36 = 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{k}} (-x^2 + k)\,dx \rightarrow k = 9$

►3.- A = $\int_0^1 (e^{2x} - e^x)\, dx + \int_1^2 (e^2 - e^x)\, dx = \frac{e^2+1}{2} + 1 = \frac{e^2+3}{2} u^2$

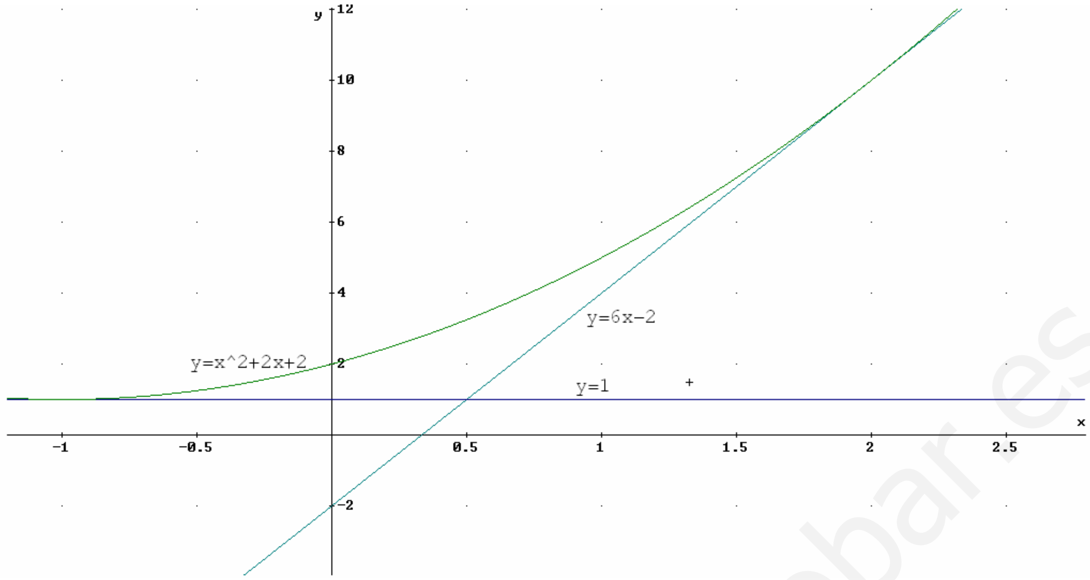


►4.- A = $\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)\, dx \; = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2} u^2$.

►5.- A = $\int_0^{0,5} (8x - x)\, dx + \int_{0,5}^1 \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx \; = \frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3}{2} u^2$



►6.- $A = \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 2x + 2 - 1\right) dx - A_{triángulo} = 9 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 9 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4} u^2$



►7.- $\int x \ln(1+x^2)\, dx$ = [por partes, con u = $\ln(1+x^2)$, dv = x dx] =

$$= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2+1}{2}\right) \cdot \ln\left(1+x^2\right) + C$$

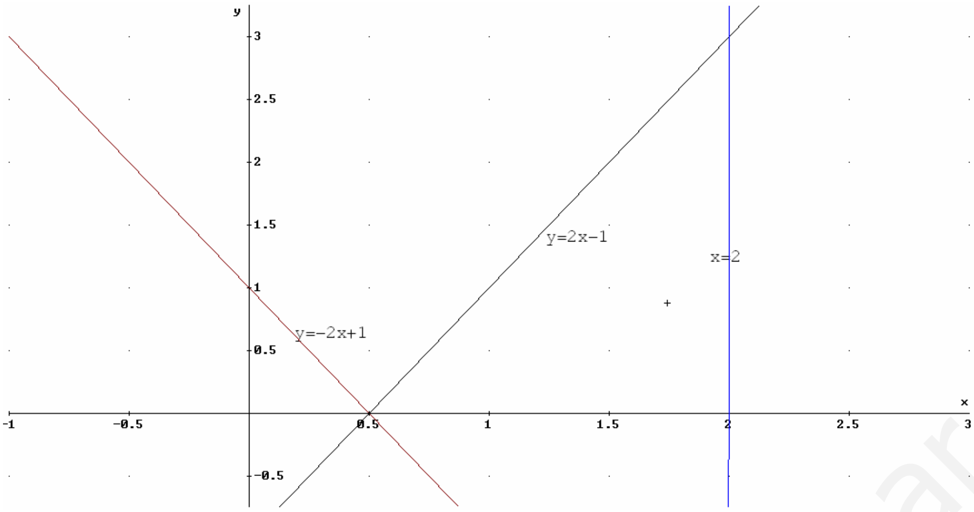
►8.- $f(x) = \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{5\,x^3}{36} + \frac{x}{4} - \frac{e^3}{36}$

►9.- $\int \frac{sen\, x}{(m + n \cos x)^2}\, dx = \frac{1}{n\,(m + n \cos x)} + C$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\, dx = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + C$$

►10.- a = -1 , b = 0 , c = 3 y d = 0. $f(x) = - x^3 + 3\, x$

► 11.- $\int_0^2 |2x-1|\, dx \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{1}{4}+\frac{9}{4} = \frac{5}{2}$



► 12.- $\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+4}\, dx \;=\; x + \frac{20}{3}\ln|x-4| - \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$