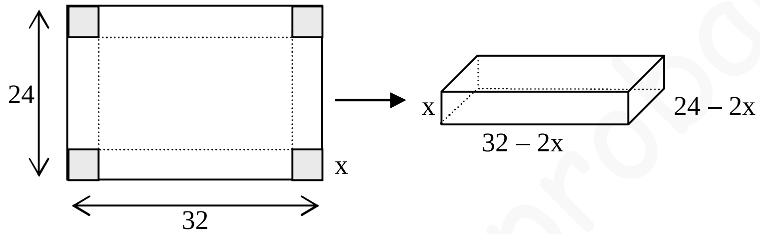
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Planteamiento y resolución de los problemas de optimización

Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:
1. Determinar el objetivo del problema: lo que hay que hacer máxima o mínima.
    En el ejemplo anterior el objetivo es que el *volumen de la caja sea máximo.*

2. Expresar en forma de función tal objetivo.
    La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura.
Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.



Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen de la caja obtenida será:

$$V = (32 - 2x)(24 - 2x)x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

3. Los puntos máximos o mínimos se encuentran, si existen, entre las soluciones de $V' = 0$.

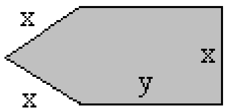
$$V' = 12x^2 - 224x + 768 = 0 \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{208}}{3} \text{ (se ha simplificado)}$$

Se obtienen $x \approx 4{,}53$ y $x \approx 14{,}14$.

4. Para ver cuál de ellos es el máximo se hace $V'' = 24x - 224$ y se evalúa en esas soluciones.
Como $V''(4{,}53) < 0$ y $V''(14{,}14) > 0$, el máximo se da para x = 4,53. Esta es la solución buscada.

<u>Nota</u>: El valor x = 14,14 no es posible, pues 24 cm no da para cortar dos trozos de tamaño 14,14 cada uno.

1. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima?

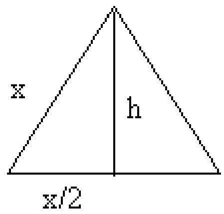


Solución:
Se trata de un problema de optimización.

Objetivo: que el área de la figura sea máxima.

La figura está formada por un triángulo equilátero de lado x y por un rectángulo de lados *x* e *y*.

Área del triángulo: $A_T = \dfrac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2$. Véase la figura.



La altura del triángulo es: $h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

Área del rectángulo: $A_R = xy$

Área total: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} x^2 + xy$

Condición: perímetro de la figura = 100 m $\rightarrow$ 100 = 3x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - \dfrac{3}{2} x$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 50x - \frac{3}{2} x^2$$

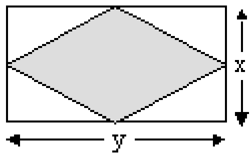
Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3} - 6}{2} x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{6 - \sqrt{3}} = \frac{100(6 + \sqrt{3})}{33}$$

Como $A''(x) = \dfrac{\sqrt{3} - 6}{2} < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.

El valor de *y* será: $y = 50 - \dfrac{50(6 + \sqrt{3})}{11}$.

2. Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región rectangular. ¿Cuáles son los valores de x e y , dimensiones del rectángulo, que hacen que el área del romboide, formado por la unión de los puntos medios de los lados, sea máxima? (2,5 puntos)



Solución:

Objetivo: que el área del romboide sea máxima. Su área es la mitad que la del rectángulo. Por tanto:

Área del romboide: $A_R = \frac{x \cdot y}{2}$.

Condición: perímetro del rectángulo = 100 m $\rightarrow$ 100 = 2x + 2y $\Rightarrow$ $y = 50 - x$

Sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$A(x) = 25x - \frac{1}{2}x^2$$

Esta función alcanza el máximo en las soluciones de A´(x) = 0 que hacen negativa a A´´(x).

$$A'(x) = 25 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Como $A''(x) = -1 < 0$, para ese valor hallado se tendrá el máximo buscado.

El valor de *y* será: $y = 25$.

Por tanto, tanto el rectángulo como el romboide son cuadrados. El “rectángulo” tendrá lado 25; el “romboide” será un cuadrado de lado $\frac{25}{\sqrt{2}}$.

3. Considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica, M, situado en el primer cuadrante (x ≥ 0, y ≥ 0). Si por el punto M se trazan paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos, A y B, respectivamente.

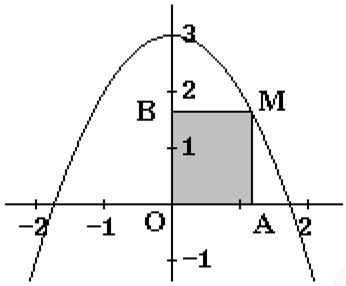
a) Haz una gráfica de los elementos del problema.

b) Halla las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga área máxima.

Solución:

a) La curva es una parábola. Puede representarse dando valores.

La situación es la siguiente.



b) Si el punto M = (x, y), las coordenadas de A y B son: A = (x, 0) y B = (0, y).

El área del rectángulo será: $S = xy$

Como $y = 3 - x^2$, sustituyendo se tiene: $S(x) = x(3 - x^2) = 3x - x^3$

El máximo de S(x) se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hagan negativa a S´´(x).

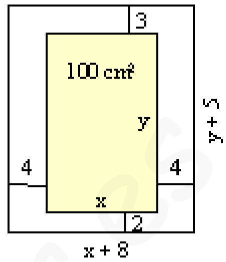
$S'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$ x = 1 y x = –1 (esta última no vale)

Como $S''(x) = -6x$, se tiene que S´´(1) = –6 < 0; luego para ese valor de x se tendrá la superficie máxima.

Por tanto M = (1, 2).

4. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.
Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:
Si las dimensiones de la parte impresa son x por y, el cartel será como el que dibujamos.



La cantidad de papel que se necesita, y que se desea que sea mínima, es:

$$S = (x + 8)(y + 5)$$

Con la condición de que xy = 100 $\Rightarrow$ y = 100/x

Sustituyendo en S, queda:

$$S(x) = (x+8)\left(\frac{100}{x}+5\right) \Rightarrow S(x) = 5x + \frac{800}{x} + 140$$

Esta función es mínima en las soluciones de S´= 0 que hacen positiva a S´´.

$$S'(x) = 5 - \frac{800}{x^2} \Rightarrow S''(x) = \frac{1600}{x^3}$$

S´(x) = 0 $\Rightarrow x^2 = 160 \Rightarrow x = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{100}{4\sqrt{10}} = 2{,}5\sqrt{10}$

Como para ese valor S´´ es positiva se tiene la solución mínima buscada.

Las dimensiones del cartel deben ser:

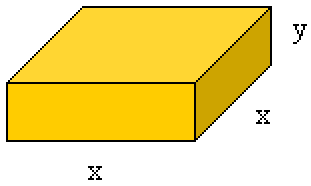
ancho: $x + 8 = 8 + 4\sqrt{10}$

alto: $y + 5 = 5 + 2{,}5\sqrt{10}$

5. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

Solución:

Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será $V = x^2y$. Esta es la función que se desea hacer máxima. Se sabe que $2x + 2y = 30 \Rightarrow y = 15 - x$.



Luego

$$V(x) = x^2 y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

El máximo de V se da en la solución de V´= 0 que hace negativa a V´´.

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)\,; \qquad V''(x) = 30 - 6x$$

La derivada se anula para x = 0 y x = 10. Como V´´(!0) = –30 < 0, para ese valor se tiene el máximo buscado.

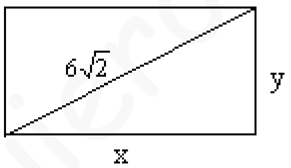
Las dimensiones serán 10 × 10 × 5; y el volumen 500 cm^3.

---

6. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$, encontrar las dimensiones del de perímetro máximo.

Solución:

Los rectángulos son de la forma



Su perímetro es P = 2x + 2y, siendo la relación entre los lados $x^2 + y^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$.

Despejando ($y = \sqrt{72 - x^2}$) y sustituyendo en P queda:

$$P(x) = 2x + 2\sqrt{72 - x^2}$$

El máximo de P se obtiene en las soluciones de P´(x) que hacen negativa a P´´(x).

$$P'(x) = 2 + \frac{2(-2x)}{2\sqrt{72 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{72 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 2\sqrt{72 - x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 72 - x^2 \;\Rightarrow\; x = 6$$

En vez de hacer P´´(x), porque resulta engorrosa, podemos estudiar el signo de P´(x) a izquierda y derecha de x = 6. Así,

si x < 6, P´(x) > 0 $\rightarrow$ P(x) es creciente.

si x > 6, P´(x) < 0 $\rightarrow$ P(x) es decreciente

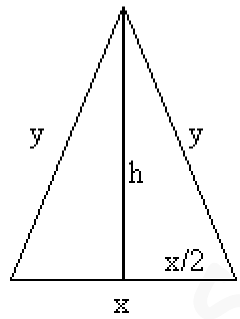
Como la función crece a la izquierda de x = 6 y decrece a su derecha, para x = 6 se da el máximo de P(x).

Si el lado x = 6, el otro lado vale también 6. Así pues, se trata de un cuadrado de lado 6.

7. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 8 $\Rightarrow$ 2y + x = 8 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \dfrac{8-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{64-16x+x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16-4x}$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \dfrac{x\sqrt{16-4x}}{2} = \sqrt{4x^2 - x^3}$

Para que A sea máxima: A´(x) = 0 y A´´(x) < 0:

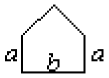
$$A'(x) = \frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}} = 0 \Rightarrow 8x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 8/3$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de A(x).

Para x < 0 no tiene sentido ver el signo de A´.
Para 0 < x < 8/3, A´(x) > 0 $\Rightarrow$ A(x) crece.
Para x > 8/3, A´(x) < 0 $\Rightarrow$ A(x) decrece.

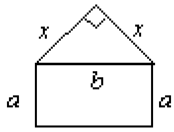
Como la función crece a la izquierda de x = 8/3 y decrece a su derecha, en x = 8/3 se da el máximo.

Por tanto, la base pedida es x = 8/3, mientras que la altura valdrá $h = \sqrt{16 - 4(8/3)} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

8. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º. 

Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.

Solución:
Suponemos que los dos lados superiores son iguales (el enunciado no lo dice, pero así lo sugiere la figura). Si su medida es x se tendrá:



Por Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

El perímetro es: $2a + b + 2x = 6 \;\to\; 2a + b + \frac{2b}{\sqrt{2}} = 6 \;\Rightarrow\; a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A = ab + \frac{x^2}{2} = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}\cdot b + \frac{b^2}{4} \;\Rightarrow\; A(b) = \frac{12b - (1+2\sqrt{2})b^2}{4}$$

Para que A sea máxima: $A' = 0$; $A'' < 0$.

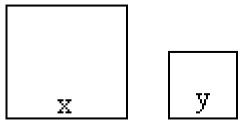
$$A'(b) = \frac{12 - 2(1+2\sqrt{2})b}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$$

$A''(b) = -\frac{(1+2\sqrt{2})}{2} < 0 \to$ luego, para el valor de *b* hallado se tiene el máximo de A.

Si $b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \to a = \frac{6 - \frac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

9. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo henos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro? (2,5 puntos)

Solución:
Sean los cuadrados siguientes:



Perímetro = 4x + 4y = 100 cm
Superficie = $x^2 + y^2$
Coste = $2x^2 + 3y^2$

Despejando y en la ecuación del perímetro: $y = \dfrac{100-4x}{4} = 25 - x$

Sustituimos en la expresión del coste:

$$C(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 \;\Rightarrow\; C(x) = 5x^2 - 150x + 1875$$

El coste será mínimo en la solución de C´(x) = 0 que haga positiva C´´(x).

$$C´(x) = 10x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; x = 15$$

Como C´´(x) = 10 > 0, para ese valor de x = 15 se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, los lados deben ser de 15 cm y de 25 – 15 = 10 cm.

---

10. Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima (1,5 puntos). Calcular dicha suma (1 punto)

Solución:
Sean los sumandos x y e –x:

Se desea que S(x) = ln x + ln(e – x) sea máxima.
El máximo se da en las soluciones de S´(x) = 0 que hacen negativa a S´´(x).

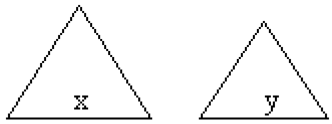
$$S´(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e-x}{x(e-x)} - \frac{x}{x(e-x)} = 0 \;\Rightarrow\; e - x - x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{e}{2}$$

Como $S´´(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{(e-x)^2}$ es suma de dos números negativos, S´´(x) < 0 para cualquier valor de x; en consecuencia, para $x = \dfrac{e}{2}$ se tendrá el máximo buscado.

La suma pedida es:

$$S = \ln\frac{e}{2} + \ln\frac{e}{2} = 2\ln\frac{e}{2} = 2(\ln e - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

11. Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima. (2,5 puntos)



Solución:

La altura del triángulo de lado x es:

$$h_x = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

la del triángulo de lado y es, $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Se cumple que 3x + 3y = 60 $\Rightarrow$ y = 20 − x

Se desea que

$$S = S_x + S_y = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} + \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + y^2)$$

sea mínima.

Sustituyendo y = 20 − x, se tiene: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + (20-x)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 40x + 400)$

Para que S sea mínima: S´= 0 y S´´ > 0:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 10) = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $S'' = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, para ese valor de x = 10 se tiene el mínimo buscado.

En consecuencia, los lados será *x* = 10 e *y* = 10; o sea, dos triángulos equiláteros iguales.

12. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Solución:
Sean x, y, z los números.
Se sabe que $y = 2x$; y que $x + y + z = 60 \Rightarrow 3x + z = 60 \Rightarrow z = 60 - 3x$
El producto de los tres números es:

$$P = xyz = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x) = -6x^3 + 120x^2$$

El producto en función de x es: $P(x) = -6x^3 + 120x^2$
Este producto es máximo en los valores de x que cumplen que $P'(x) = 0$ y $P''(x) > 0$

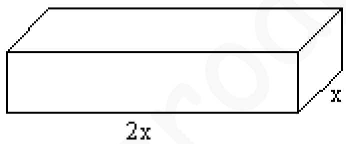
$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 6x(-3x + 40) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 40/3.$$

Como $P''(x) = -36x + 240$ se tiene que $P''(40/3) = -120 < 0$. Por tanto, el producto será máximo cuando $x = 40/3$.
Los otros dos números son $y = 2x = 80/3$; $z = 20$.

El producto máximo es $P = \frac{40}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot 20 \approx 7111{,}11$

---

13. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



Solución:
Si su altura es h, el volumen de este paralelepípedo vale: $V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h$
El área total de sus 6 caras es:

$$A = 2 \cdot (2x \cdot x) + 2 \cdot (2x \cdot h) + 2 \cdot (x \cdot h) \Rightarrow A = 4x^2 + 6xh$$

Como $V = 2x^2h = 9 \Rightarrow h = \frac{9}{2x^2}$

Sustituyendo en A: $A(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$

Esta función es mínima en las soluciones de $A' = 0$ que hacen positiva a A''.

$$A'(x) = 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Como $A''(x) = 8 + \frac{54}{x^3} > 0$ para todo $x > 0$, para $x = \frac{3}{2}$ se tiene la solución mínima.

Por tanto, el lado más largo valdrá 3, y la altura $h = \frac{9}{2(3/2)^2} = 2$

14. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

En este caso:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f(a) = \frac{1}{a}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow \quad f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

Se tendrá: $y - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}(x - a) \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$

b) Corte con eje OY, (se hace x = 0) $\Rightarrow \quad y = \dfrac{2}{a}$. Punto $\left(0, \dfrac{2}{a}\right)$.

Corte con eje OX, (la y = 0) $\Rightarrow \quad 0 = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}. \Rightarrow \quad x = 2a$. Punto $(2a, 0)$.

c) La distancia entre los dos puntos de corte es:

$$d = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$$

Esta distancia será mínima cuando lo sea su cuadrado, $d^2 = D = 4a^2 + \dfrac{4}{a^2}$.

El valor mínimo se da en las soluciones de D´= 0 que hagan D´´ > 0.
(Derivamos con respecto a *a*.)

$$D' = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \;\Rightarrow\; 8a^4 - 8 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1 \text{ (la solución } a = -1 \text{ se descarta)}$$

Como $D'' = 8 + \dfrac{24}{a^4} > 0$, para $a = 1$ se dará el valor mínimo.