REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

---

1. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$. Se pide:

a) Encontrar los intervalos donde esta función es creciente y donde es decreciente. (4 puntos)
b) Calcular las asíntotas. (2 puntos)
c) Hacer una gráfica de la función. (4 puntos)

Solución:

a) El dominio de esta función es $\mathbf{R}-\{-2, 2\}$.

Su derivada es:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-3)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

La derivada se anula en x = 0. Como además no está definida en x = –2 y en x = 2, hay que considerar los intervalos que indicamos a continuación:

- Si $x<-2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-2<x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0<x<2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. (En x = 0 se tendrá un máximo relativo.)
- Si $x>2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Nota: Podría observarse que la función es par.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ x = –2 es una asíntota vertical.

- Si $x\to -2^-$, $f(x)\to +\infty$
- Si $x\to -2^+$, $f(x)\to -\infty$

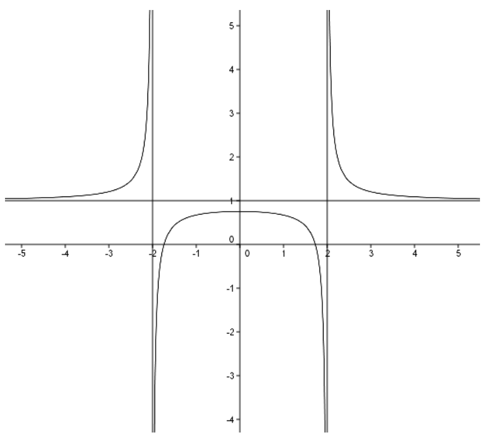
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ x = 2 es una asíntota vertical.

- Si $x\to 2^-$, $f(x)\to -\infty$
- Si $x\to 2^+$, $f(x)\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=1 \Rightarrow$ y = 1 es una asíntota horizontal.

(La recta va por debajo de la curva, pues $x^2-3>x^2-4$.)

Su gráfica aproximada es la adjunta.



2. Representar gráficamente la función $f(x) = x - 2\text{sen}\, x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución:
La función dada está definida en toda la recta real; y, por tanto en el intervalo $(-\pi, \pi)$

Estudiamos su crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos:

$f(x) = x - 2\text{sen}\, x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x \Rightarrow f''(x) = 2\text{sen}\, x$

$f'(x) = 1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = ½ \Rightarrow x = -\pi/3,\ x = \pi/3$

Como $f''(-\pi/3) = 2\ \text{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ en $x = -\pi/3$ se tiene un máximo.
Como $f''(\pi/3) = 2\ \text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ en $x = \pi/3$ se tiene un mínimo.
Por otra parte:

si $-\pi < x < -\pi/3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
si $-\pi/3 < x < \pi/3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
si $\pi/3 < x < \pi$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

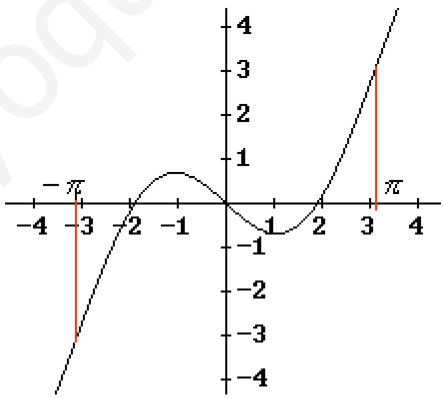
Algunos valores de la función son:

x	$-\pi$	$-5\pi/3$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0
f(x)	$-\pi$	$-5\pi/6 + 1$	$-\pi/2 + 2$	$-\pi/3+\sqrt{3}$	$-\pi/6 + 1$	0

Como la función es impar:

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/3$	π
f(x)	0	$\pi/6 - 1$	$\pi/3-\sqrt{3}$	$\pi/2 - 2$	$5\pi/6 - 1$	π

Su gráfica es:



3. Estudia y representa la función $y = e^{-x^4}$.

Solución:

- La función está definida para todo número real.
- Su recorrido es positivo: $e^{-x^4} > 0$.
- Es una función par: $e^{-(-x)^4} = e^{-x^4}$
- Tiene una asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^4} = 0^+$
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y = e^{-x^4} \Rightarrow y' = -4x^3 e^{-x^4} \to$ se anula en x = 0

Si x < 0, $y' > 0 \Rightarrow$ la función crece.
Si x > 0, $y' < 0 \Rightarrow$ la función decrece $\Rightarrow$ En x = 0 hay un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y' = -4x^3 e^{-x^4} \Rightarrow y'' = -12x^2 e^{-x^4} + 16x^6 e^{-x^4} = 4x^2 e^{-x^4}(-3 + 4x^4) \to$$

$\to$ se anula en $x = \sqrt[4]{3/4} \approx \pm 0{,}93$ y en x = 0

Si $x < -\sqrt[4]{3/4}$, $y'' > 0 \Rightarrow$ la función convexa ($\cup$).

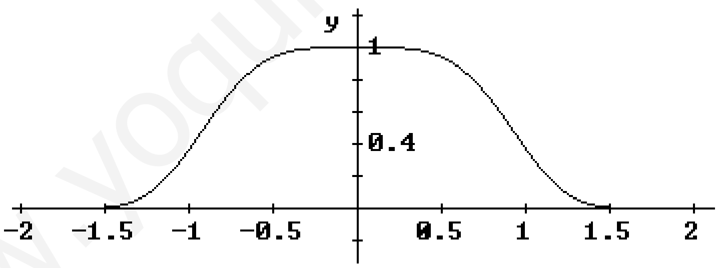
Si $-\sqrt[4]{3/4} < x < 0$, $y'' < 0 \Rightarrow$ la función cóncava ($\cap$).

Por la simetría: si $0 < x < \sqrt[4]{3/4}$ la función es cóncava y si $x > \sqrt[4]{3/4}$ será convexa.

Pueden darse algunos valores:

(–1, 1/e) ≈ (1, 0,37), (–0,5, 0,94), (0, 1); (0,5, 0,94), (1, 0,37)

Se obtiene la gráfica:



4. Se considera la curva definida por la función: $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

1. Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías.
2. Asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función?
4. Representación aproximada de la curva.
5. ¿Cuál será la gráfica de la curva $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}+1$?

Solución:

1. La función está definida siempre, pues el denominador no se anula en ningún caso.
Corte ejes:

si x = 0 ⇒ y = 0 → punto (0, 0)
si y = 0 ⇒ x = 0 → se obtiene el mismo punto.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas (impar), pues

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=-\frac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$$

2. Tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+1)}=1 \quad \text{y}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

La asíntota es la recta y = x.

Como $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3+x-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$,

cuando x → +∞, la curva va por debajo de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ resta)

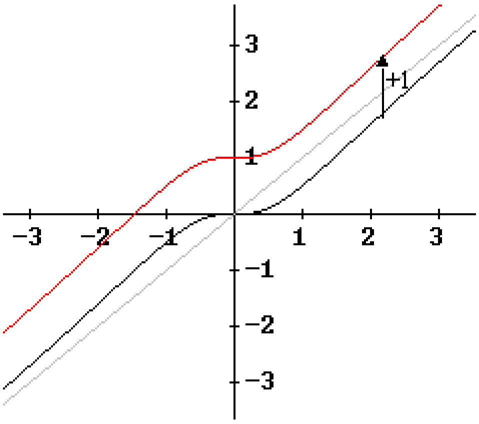
cuando x → −∞, la curva va por encima de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ suma)

3. Derivamos: $y'=\dfrac{3x^2(x^2+1)-(x^3\cdot 2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

Salvo en x = 0, la derivada siempre es positiva ⇒ la función es creciente siempre. En consecuencia no tiene extremos. En x = 0 hay un punto de inflexión con tangente horizontal.

4. Algunos valores de la curva son: (0, 0), (1, ½), (2, 8/5), (3, 27/10), y sus simétricos.

Representándolos se obtiene la gráfica siguiente.



5. La gráfica de $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}+1$ se obtiene trasladando una unidad hacia arriba la curva anterior. (En la figura se dibuja de color rojo.)

5. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^4 e^{-x}.$$

Como consecuencia calcular los máximos y mínimos locales de *f* y representar su gráfica.

Solución:
Hacemos la derivada:

$$f(x) = x^4 e^{-x} \;\Rightarrow\; f(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x}(4 - x)$$

La derivada se anula cuando x = 0 y x = 4, por tanto debemos estudiar lo que pasa en los intervalos: x < 0; 0 < x < 4; x > 4.

- si x < 0, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow$ *f* es decreciente;
- si 0 < x < 4, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow$ *f* es creciente;
- si x > 4, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow$ *f* es decreciente;

Como la derivada se anula en x = 0, es decreciente si x < 0 y creciente cuando x > 0, en x = 0 la función tiene un mínimo. De manera análoga concluimos que en x = 4 se da un máximo.

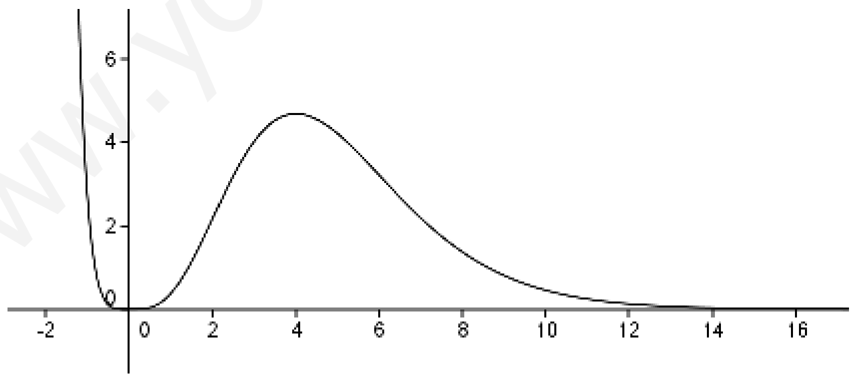
Para trazar su gráfica, además de lo dicho, puede observarse que:

- La función siempre toma valores mayores o iguales que 0, pues tanto x^4 como e^{-x} nunca toman valores negativos.
- La función tiene una asíntota horizontal hacía más infinito (la recta y = 0), pues

$$\lim_{x \to \pm 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

- Algunos puntos de la gráfica son:
  (–1, e); (0, 0), el mínimo; (1, 1/e) = (1, 0,37); (2, $16/e^2$) = (2, 2,2);
  (4, $256/e^4$) = (4, 4,7), máximo; (8, 1,4)

Así se obtiene la gráfica siguiente:



6. Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

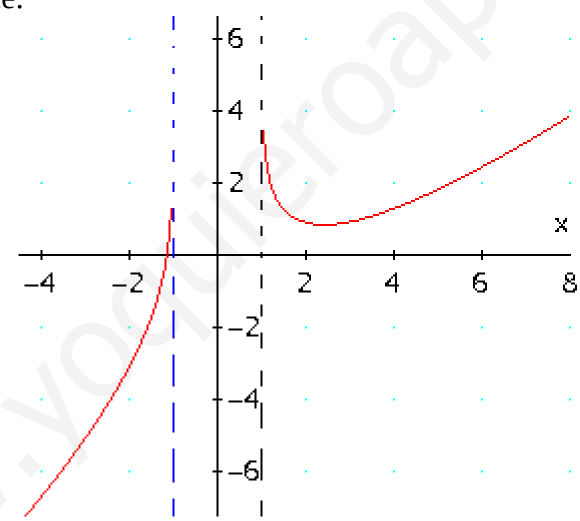
Solución:
Dominio: **R** – [–1, 1].

En x = –1 y en x = 1 la función tiene sendas asíntotas verticales.

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ si } x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

Si x < –1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
Si $1 < x < 1 + \sqrt{2}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
Si $1 + \sqrt{2} < x$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. (En $x = 1 + \sqrt{2}$ habrá un mínimo.)

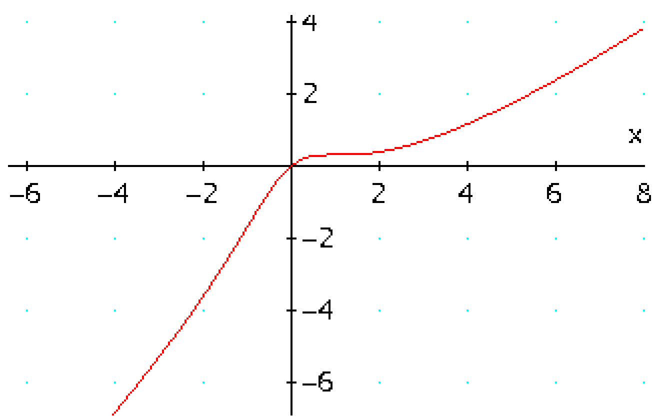
$f''(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} > 0$ para todo punto de su dominio. La función es cóncava (∪) en todo su dominio.
Su gráfica es la siguiente:



Observación. Aprovechando los cálculos anteriores, comprueba que la gráfica de la función

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

es la adjunta



7. Dada la curva $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

Solución:

Como el denominador no se anula para ningún valor de x, el dominio de definición es todo **R**.
Corte con los ejes:

Si x = 0 $\Rightarrow$ y = –1. Punto (0, –1).
Si y = 0 $\Rightarrow$ $x^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ x = –1, x = 1. Puntos (–1, 0) y (1, 0).

b) No hay asíntotas verticales: la función nunca de va al infinito.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1 \Rightarrow$ la recta y = 1 es asíntota horizontal de la curva, tanto hacia +∞ como hacia –∞.

c) Derivando:

$$y'=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

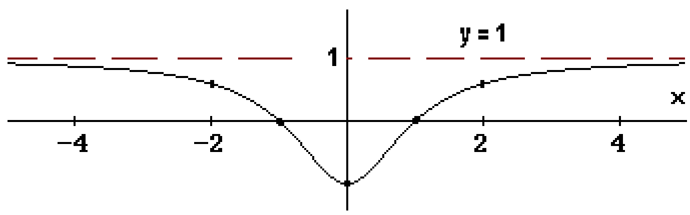
- Si x = 0, y´= 0 $\Rightarrow$ en x = 0 puede haber máximo o mínimo.
- Si x < 0, y´< 0 $\Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si x > 0, y´> 0 $\Rightarrow$ la función es creciente.

d) Como la función decrece a la izquierda de x = 0 y crece a su derecha, en x = 0 hay un punto mínimo.

También puede comprobarse viendo que y´´(0) > 0.

El efecto, como $y''=\dfrac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{4-4x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow$ y´´(0) = 4 > 0.

e) Además de la información obtenida puede verse que la curva es simétrica respecto del eje OY; si calculamos algunos valores más, como (–3, 8/10), (–2, 3/5); (2, 3/5), (3, 8/10), puede dibujarse la gráfica siguiente.



8. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$. Describir el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y los extremos de *f*.
Trazar un esquema de su gráfica.

Solución:
La función está definida para todo número real distinto de ±1: Dom (*f*) = **R** – {–1, 1}

- Crecimiento:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

La derivada se anula cuando x = 0, por tanto debemos estudiar lo que pasa en los intervalos: x < –1; –1 < x < 0; 0 < x < 1; x > 1

- si x < –1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente;
- si –1 < x < 0, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente;
- si 0 < x < 1, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;
- si x > 1, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;

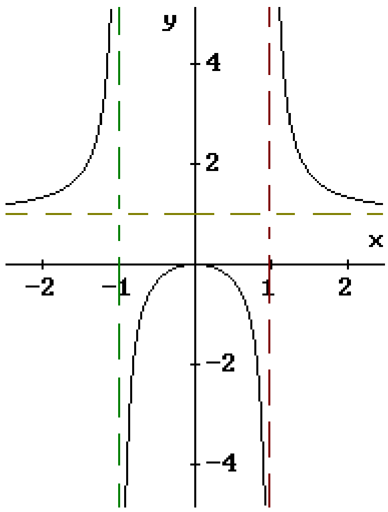
Como la derivada se anula en x = 0, es creciente si x < 0 y decreciente cuando x > 0, en x = 0 la función tiene un máximo.

Para trazar su gráfica, además de lo dicho, puede observarse que:

- La función tiene dos asíntotas verticales, x = –1 y x = 1, y otra horizontal, y = 1.
  En efecto:

$$\lim_{x\to\pm 1}=\frac{x^2}{x^2-1}=\infty;\ \lim_{x\to\pm\infty}=\frac{x^2}{x^2-1}=1$$

- Algunos puntos de la gráfica son:
  (–2, 4/3); (–1/2, –1/3);
  (0, 0): máximo;
  (1/2, –1/3); (2, 4/3)



Así se obtiene la gráfica adjunta

9. a) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) Demostrar que la sucesión $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)$

Solución:

a) Dom(*f*) = **R** – {–1}.

Asíntotas:

Tiene una asíntota vertical, la recta x = –1, pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{x+1}=\infty$.

Cuando x → -1^-, *f*(x) → +∞.
Cuando x → -1^+, *f*(x) → –∞.

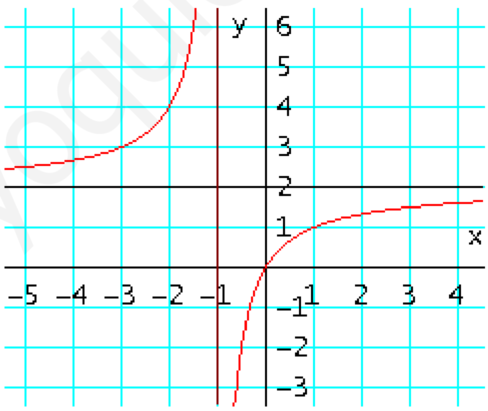
La recta y = 2 es una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2$.

Cuando x → –∞, *f*(x) → 2^+ (la curva va por encima de la asíntota.)
Cuando x → +∞, *f*(x) → 2^- (la curva va por debajo de la asíntota.)

Crecimiento:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Como la derivada es positiva para todo x de su dominio, la curva es siempre creciente.
Su gráfica es la siguiente.



b) Una sucesión es monótona creciente cuando $a_{n+1}-a_n>0$, para todo *n*.

En este caso:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}-\frac{2n}{n+1}=\frac{(2n+2)(n+1)-2n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{(n+2)(n+1)},$$

que, efectivamente, es positivo para todo *n*.

c) $$\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}=2$$

10. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente. (3,3 puntos).

Solución:
El punto en el que la curva tiene recta tangente con pendiente máxima (o mínima) es un punto de inflexión de la curva.
(En efecto: la pendiente de la recta tangente a *f*(x) en un punto genérico x viene dada por el valor de $f\,'(x)$; para evitar confusiones escribiremos $g(x)=f'(x)$. El máximo de *g*(x) se obtiene en las soluciones de la ecuación $g'(x) = 0$ que hacen negativa a la función $g''(x)$. Por tanto en las soluciones de $g'(x)=f''(x)=0$, que dan los posibles puntos de inflexión de *f*(x).)

Calculamos las tres primeras derivadas de la función:

$$y=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y''=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow y'''=\frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

La derivada segunda se anula en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Como $y'''(-1/\sqrt{3})<0$ y $y'''(1/\sqrt{3})>0$ la curva tiene recta tangente con pendiente máxima en el punto $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

El valor de esa pendiente es $y'(-1/\sqrt{3})=\dfrac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2}=\dfrac{9}{8\sqrt{3}}$

11. Sea f la función dada por $f(x)=x^2-3|x|+2, \quad x\in R.$
a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.
b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos
c) Esbócese la gráfica de f.

Solución:

a) Como $|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$, la función dada puede definirse así:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+2, & x<0\\ x^2-3x+2, & x\geq 0\end{cases}$$

Esta función está definida siempre y es continua para todo valor de x, incluido el 0, pues tanto por la izquierda como por la derecha de x = 0, f(x) $\to$ 2.

Para ver la derivabilidad en x = 0 estudiamos las derivadas laterales.
Por la izquierda:

$$f´(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+3h+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h+3)}{h}=3$$

Por la derecha:

$$f´(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-3h+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-3)}{h}=-3$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en x = 0.

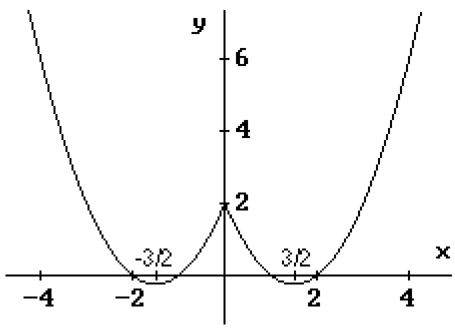
b) Salvo en x = 0, la derivada de la función es:

$$f´(x)=\begin{cases}2x+3, & x<0\\ 2x-3, & x>0\end{cases}$$

Esta derivada se anula en los puntos x = –3/2 y x = 3/2, por tanto se tiene:

- si x < –3/2, $f´$(x) < 0 $\Rightarrow$ f(x) es decreciente
- si –3/2 < x < 0, $f´$(x) > 0 $\Rightarrow$ f(x) es creciente
  La función tiene un mínimo en x = –3/2
- si 0 < x < 3/2, $f´$(x) < 0 $\Rightarrow$ f(x) es decreciente. (La función tiene un máximo en x = 0)
- si x > 3/2, $f´$(x) > 0 $\Rightarrow$ f(x) es creciente
  La función tiene un mínimo en x = 3/2

c) La gráfica de la función viene dada por dos trozos de parábolas, $f(x)=x^2+3x+2$ hasta x = 0 y $f(x)=x^2-3x+2$, desde x = 0. Se obtiene la siguiente figura.



12. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:
La función puede definirse a trozos así:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x}, & x<0\\ \dfrac{x}{2-x}, & x\geq 0-\{2\}\end{cases}$$

Por tanto, Dom(*f*) = **R** – {2}.

En el punto x = 2 la curva tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{2-x}=\infty$.

Cuando x ⟶ 2^-, *f*(x) ⟶ +∞.
Cuando x ⟶ 2^+, *f*(x) ⟶ –∞.
Por otra parte, las rectas y = 1 e y = –1 son asíntotas horizontales de la función. La primera, y = 1, hacia –∞; la segunda, y = –1, hacia +∞.
En efecto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2-x}=1 \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-x}=-1$$

Cuando x ⟶ –∞, *f*(x) ⟶ 1^- (la curva va por debajo de la asíntota.)
Cuando x ⟶ +∞, *f*(x) ⟶ -1^- (la curva va por debajo de la asíntota.)

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(2-x)^2}, & x<0\\ \dfrac{2}{(2-x)^2}, & x>0-\{2\}\end{cases}$$

Como puede verse fácilmente, la función tampoco es derivable en x = 0, pues por la izquierda su derivada es negativa (tiende a –1/2) y por la derecha es positiva (tiende a 1/2).
También es inmediato ver que:

si x < 0, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente;
si x < 0, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Con la información obtenida y dando algunos valores podemos dibujar la gráfica.
Valores: (–2, 1/2); (–1, 1/3); (0, 0); (1, 1); (1,5, 3); (2,5, –5); (3, –3); (4, –2); (6, –3/2)

La gráfica pedida es la adjunta.