Integrales definidas

1. Halla el valor de:

a) $\int_{-2}^{3}\left(x^2+2\right)dx$ b) $\int_{0}^{7}\frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx$ c) $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt{1+x^2}\,dx$ d) $\int_{0}^{1}xe^{-3x^2+1}dx$

Solución:

Para hallar una primitiva de cada función hay que ajustar constantes.

a) $\int_{-2}^{3}\left(x^2+2\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right|_{-2}^{3} = 9+6-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{65}{3}$

b) $\int_{0}^{7}\frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx = \frac{8}{5}\int_{0}^{7}\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}dx = \left.\left(\frac{8}{5}\sqrt{5x+1}\right)\right|_{0}^{7} = \frac{8}{5}\left(6-1\right)=8$

c) $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}}2x\left(1+x^2\right)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2} = \left.\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right|_{0}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(8-1\right)=\frac{7}{3}$

d) $\int_{0}^{1}xe^{-3x^2+1}dx = -\frac{1}{6}\int_{0}^{1}\left(-6xe^{-3x^2+1}\right)dx = \left.\left(-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}\right)\right|_{0}^{1} = -\frac{1}{6}\left(e^{-2}-e\right)$

2. Calcula la integral $\int_{1}^{e}\ln(x^2)dx$.

Solución:

Aplicando una de las propiedades de los logaritmos $\int_{1}^{e}\ln(x^2)dx = \int_{1}^{e}2\ln(x)dx$.

Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=dx \Rightarrow v=x$

Luego:

$$2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x-\int dx\right) = 2\left(x\ln x - x\right)$$

Por tanto:

$$\int_{1}^{e}2\ln x dx = 2\left[x\ln x - x\right]_{1}^{e} = 2\left[e\ln e - e-(1\ln 1-1)\right]=2.$$

3. Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ calcula $\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4+\ln x)} dx$.

Solución:

Si $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

Además: si $x = e$, $t = \ln e = 1$; y si $x = e^2$, $t = \ln e^2 = 2$.

Por tanto,

$$\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4+\ln x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{3}{(4+\ln x)} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{3}{4+t} dt =$$

$$= 3\left(\ln(4+t)\right)\Big|_1^2 = 3\left(\ln 6 - \ln 5\right) = 3\ln\frac{6}{5}$$

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$ b) $\int_0^1 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx$

Solución:

En ambos casos, una primitiva de las funciones dadas se obtiene por el método de partes.

a) Para $\int \arcsin x \, dx$ se hace:

$$u = \arcsin x \text{ y } dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \,;\, v = x$$

Luego,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \,.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) Para calcular $\int \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx$ se toma:

$$u = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \text{ y } dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right) dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} dx \,;\, v = x$$

Luego

$$\int \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx = x\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} d = x\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \sqrt{x^2+1}$$

Por tanto

$$\int_0^1 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx = \left(x\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \sqrt{x^2+1} \right)\Big|_0^1 = \ln(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} - 1$$

5. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Calcula razonadamente las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

<u>Solución:</u>

a) La integral $\int e^{2x}\cos x\,dx$ hay que hacerla por partes.

Haciendo $u = e^{2x}$ y $\cos x dx = dv$, se tiene: $du = 2e^{2x}dx$; $v = \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx.$$

La segunda integral, $\int 2e^{2x}\sin x\,dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = 2e^{2x}$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = 4e^{2x}dx$ y $-\cos x = v$

Luego,

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - \left(-2e^{2x}\cos x + \int 4e^{2x}\cos x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int 2e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{5}\left(e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(e^{2\pi}\sin \pi + 2e^{2\pi}\cos \pi\right) - \left(e^{0}\sin 0 + 2e^{0}\cos 0\right)\right] = \frac{1}{5}\left(-2-2e^{2x}\right).$$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Haciendo el cambio $\cos^2 x = t \Rightarrow 2\cos x(-\sin x)dx = dt \Rightarrow 2\sin x\cos x dx = -dt$.

Como $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, la integral inicial queda:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{-1}{1+t}dt = -\ln t = -\ln\left(1+\cos^2 x\right)$$

Por tanto,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left(-\ln\left(1+\cos^2 x\right)\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

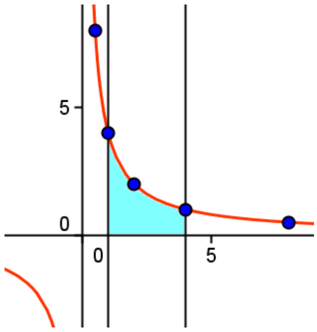
$$= -\ln\left(1+\cos^2(\pi/2)\right) - \left(-\ln\left(1+\cos^2 0\right)\right) = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

Cálculo de áreas de recintos planos

6. Calcula el área de la región limitada por $y = \dfrac{4}{x}$, el eje *OX* y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

Solución:

La función $y = \dfrac{4}{x}$, que es una hipérbola equilátera, puede trazarse dando algunos puntos: (0,5, 8); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (8, 0,5).



La región es la sombreada en la gráfica adjunta.

El área viene dada por la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{4}{x}\,dx = [4\ln x]_1^4 = 4\ln 4 \text{ unidades cuadradas (u}^2\text{)}$$

7. Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x) = xe^x$ y el eje *OX*, en el intervalo [–2, 0].

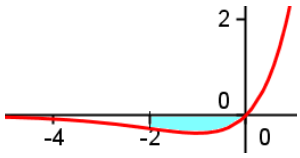
Solución:

En el intervalo considerado, el signo de la función es negativo, por tanto, la superficie buscada viene dada por:

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^x dx\,.$$

Aunque la gráfica no es imprescindible, es bueno hacerla; al menos, esbozarla.

También podría decirse que $S = \left|\int_{-2}^{0} xe^x dx\right|$.



La integral $\int xe^x dx$ se hace por partes.

Tomando:

$$u = x \text{ y } dv = e^x dx \Rightarrow du = dx\,;\; v = e^x$$

Se tiene:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Luego:

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^x dx = -\left[xe^x - e^x\right]_{-2}^{0} = 1 - 3e^{-2} \text{ u}^2$$

8. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x}$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 2].

Solución:

Como en el intervalo de integración la función es positiva, el área pedida es:

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{2+x}dx = \int_0^2 \left(x - 2 + \frac{4}{2+x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(2+x)\right]_0^2 =$$

$$= -2 + 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln 2 - 2 \text{ u}^2$$

9. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = \sin 2x$ y el eje *OX* en el intervalo [0, π].

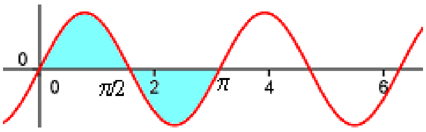
Solución:

La función $y = \sin 2x$ es periódica de periodo π.

Corta al eje *OX* en los puntos $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

Su gráfica se puede trazar a partir de la de la función seno.

El área pedida es la sombreada en la figura adjunta.



Luego:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2$$

10. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y = (\sin x)^2 \cos x$ y el eje *OX* en el intervalo [0, π/2].

Solución:

Como la función es positiva en el intervalo de estudio, la superficie buscada es:

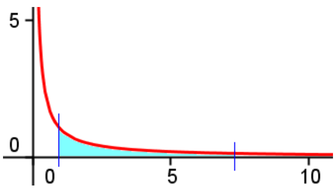
$$S = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{3} \text{ u}^2$$

11. Halla el área encerrada entre la curva $y = \dfrac{1}{x}$ y el eje *OX*, entre $x = 1$ y $x = e^2$.

Solución:

El recinto es el sombreado de la figura adjunta.

(No es necesario dibujarlo, pues la función es positiva en el intervalo de integración).



El área es:

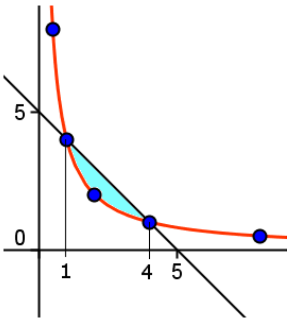
$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2 \text{ u}^2$$

12. Calcula el área de la región limitada por la función $y = \dfrac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

Solución:

La recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1) de la curva tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-4}{1-4} \Leftrightarrow y = -x + 5.$$



El recinto es el sombreado en la figura adjunta.

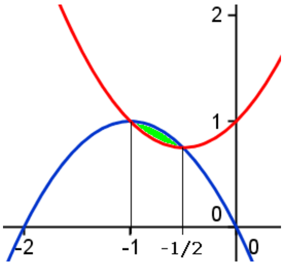
El área de esa región viene dada por la integral definida:

$$\int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \text{ u}^2$$

13. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 + x + 1$, $y = -x^2 - 2x$.

Solución:

El área es la del recinto sombreado en la figura adjunta. (Como las gráficas son parábolas pueden trazarse fácilmente, dando algunos valores).



Las curvas se cortan en $x = -1$ y en $x = -1/2$, que son las soluciones del la ecuación: $x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

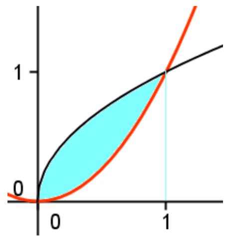
Luego:

$$S = \int_{-1}^{-1/2} (-x^2 - 2x - (x^2 + x + 1))dx = \int_{-1}^{-1/2} (-2x^2 - 3x - 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Bigg|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{24} \text{ u}^2$$

14. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solución:



El recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, que puede trazarse dando algunos valores, es el adjunto.

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. La curva que va por encima es $y = \sqrt{x}$.

Luego:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ u}^2$$

15. Calcula el valor de a para el que las tangentes a la curva $y = x^2 + a$ en los puntos de abscisa de valor absoluto 1, pasan por el origen de coordenadas. Halla el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes.

Solución:

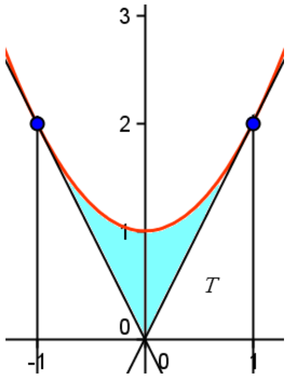
La tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

En nuestro este caso, como $f'(x) = 2x$, se tiene:

- En $x = 1$: $y - (1 + a) = 2\cdot(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1 + a$.

Como debe pasar por (0, 0) $\Rightarrow 0 = -1 + a \Rightarrow a = 1$.

La tangente es: $y = 2x$.



- En $x = -1$: $y - (1 + a) = -2\cdot(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 1 + a$.

Por pasar por (0, 0) $\Rightarrow 0 = -1 + a \Rightarrow a = 1$.

La tangente es: $y = -2x$.

El recinto limitado por la curva y las dos tangentes es el sombreado en la figura adjunta.

El área pedida vale:

$$A = 2\left[\int_0^1 (x^2 + 1)dx - A_T\right] = 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 - 2\cdot\frac{1\cdot 2}{2} = \frac{2}{3} \text{ u}^2$$

A_T es un triángulo de base 1 y altura 2.

16. Calcula el área encerrada entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

Solución:

Para determinar el área interesa conocer los puntos de corte de las curvas y saber qué curva va por encima de la otra entre esos puntos de corte. También es conveniente hacer un esquema gráfico de la situación.

Puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

Las curvas se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Posición de las curvas en los intervalos (0, 1) y (1, 2).

Se hace la diferencia $g(x) - f(x)$, que es $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2)$.

Luego:

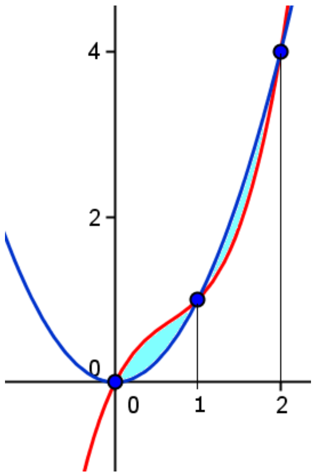
- Si $0 < x < 1$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2) = (+)\cdot(-)\cdot(-) > 0 \rightarrow g(x)$ va por encima de $f(x)$
- Si $1 < x < 2$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2) = (+)\cdot(+)\cdot(-) < 0 \rightarrow g(x)$ va por debajo de $f(x)$

Por tanto, el área pedida viene dada por

$$S = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$



El esquema gráfico, que puede obtenerse calculando y representando algunos puntos de las curvas, es el adjunto.

17. Calcula el área de la región acotada del plano limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$.

Solución:

La curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$ se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y x = 2, que son las soluciones de $x^3 - 3x^2 + 3x = x \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$.

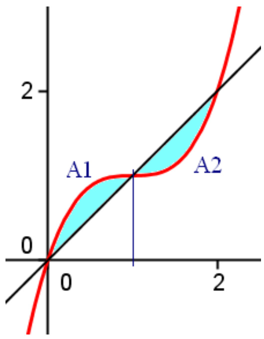
La región acotada por ellas es la sombreada en la figura adjunta.

El área pedida es

$$\text{A = A1 + A2} = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx + \int_1^2 \left(-x^3 + 3x^2 - 2x\right)dx +$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) + \left(-4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$



18. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

Solución:

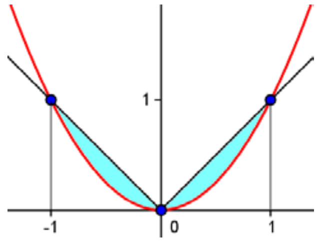
Las curvas se cortan cuando $x^2 = |x|$.

Sus soluciones son $x = 0$, $x = –1$ y $x = 1$.

Las curvas son las adjunta; pueden representarse dando valores: (–1, –1); (0, 0); (1, 1).

Por tanto:

$$S = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ \text{u}^2$$



19. De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

Solución:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\to$ pasa por (0, 0) $\Rightarrow f(0) = 0 = d$

$f´(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\to$ máximo en $x = 1 \Rightarrow f´(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (*)

$f´´(x) = 6ax + 2b \;\to$ inflexión en (0, 0) $\Rightarrow f´´(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Luego, la función es:

$f(x) = ax^3 + cx$ con $3a + c = 0$ (*) $\Rightarrow c = –3a \ldots \Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax$

Como

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 - 3ax)dx = \frac{5}{4} \Rightarrow \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = –1$ y $c = 3$

La función es: $f(x) = -x^3 + 3x$.

20. (Propuesto en Selectividad) Calcula el área determinada por las curvas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$, representadas en el dibujo adjunto.

Solución:

Los puntos de corte de las gráficas se n resolviendo el sistema:

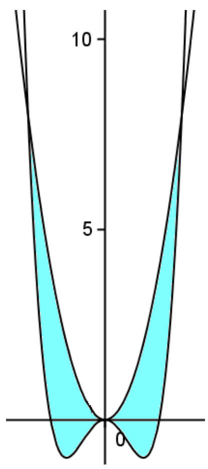
$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = –2,\ x = 0,\ x = 2$$

La curva que va por encima, en el intervalo [–2, 2], es $y = 2x^2$.

Por esto, y por la simetría de ambas curvas:

$$S = 2\int_0^2 \left(2x^2 - x^4 + 2x^2\right)dx = 2\int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)dx =$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128}{15}\ \text{u}^2$$



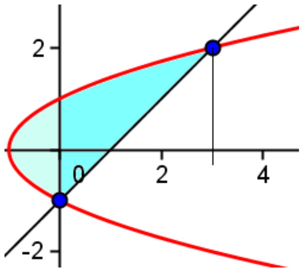
21. Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta $y = x - 1$.

Solución:

El recinto es el sombreado en la figura adjunta. Puede dibujarse dando algunos puntos:

Para la parábola: (–1, 0); (0, –1) y (0, 1); (3, –2 y (3, 2).

Para la recta: (0, –1) y (3, 2)



El corte de la recta con la parábola se produce cuando

$\sqrt{x+1} = x - 1 \Rightarrow x = 0, x = 3$.

El área será:

$$S = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - x + 1)dx =$$

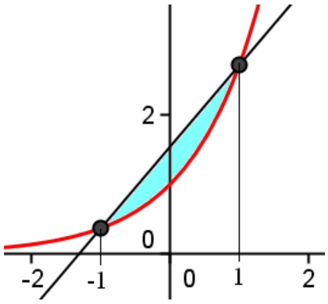
$$= \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{0}^{3} = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \text{ u}^2.$$

22. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

Los puntos de la gráfica son: $P = (-1, e^{-1})$ y $Q = (1, e)$.

En la figura se dibuja la curva y la cuerda.



El área encerrada entre la curva y la cuerda es la de la parte sombreada en la figura. Su valor es la diferencia del área del trapecio y la que queda entre la curva y el eje OX.

El área del trapecio es: $A_{TRAP} = \dfrac{(e^{-1} + e)\cdot 2}{2} = e^{-1} + e$.

El área entre la curva y el eje OX es:

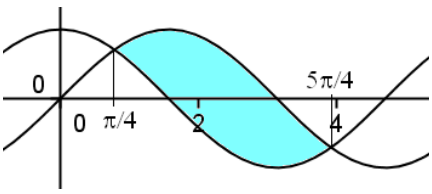
$$\text{A} = \int_{-1}^{1} e^x dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$$

Por tanto, el área de la región sombreada es: $e^{-1} + e - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}$ u^2.

23. Halla el área de la región limitada por las curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución:

La región es la sombreada en la figura adjunta.



En el intervalo [π/4, 5π/4] la curva del seno va por encima de la del coseno. Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2.$$

24. Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \dfrac{8}{x}$. Calcula su área.

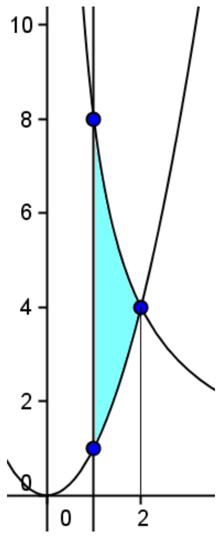
<u>Solución</u>:

Las gráficas se trazan fácilmente dando valores.

Algunos puntos:

Parábola $y = x^2$: (0, 0); (1, 1), (2, 4)

Hipérbola $y = \dfrac{8}{x}$: (1, 8); (2, 4); (4, 2); (8, 1)



Puntos de corte de la recta $x = 1$ con las curvas:
(1, 1) con la parábola; (1, 8) con la hipérbola

Corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8/x \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{8}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

El recinto es el sombreado en la figura anterior. Su área viene dada por:

$$A = \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - x^2\right) dx = \left(8\ln x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 8\ln 2 - \frac{8}{3} - \left(0 - \frac{1}{3}\right) = 8\ln 2 - \frac{7}{3} \text{ u}^2.$$

25. (Propuesto en Selectividad, Extremadura)

a) Calcula los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.

b) Dibuja el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

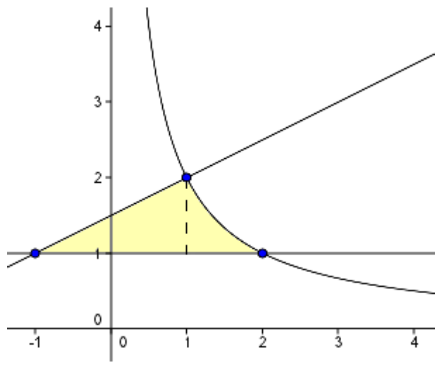
c) Calcula el área de dicho recinto.

<u>Solución:</u>

a) Los puntos de corte de la curva con cada una de las rectas se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \to (-1, 1); \quad \begin{cases} 2y - x = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \to (1, 2);$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = 1 \end{cases} \to (2, 1)$$



b) Su gráfica es la adjunta. Para representar cada curva basta con dar algunos valores.

c) El recinto sombreado puede descomponerse en dos partes: el triángulo rectángulo de la izquierda, cuya área vale 1 u^2; y el "triángulo" curvo de la derecha, cuya área se calcula por la integral definida

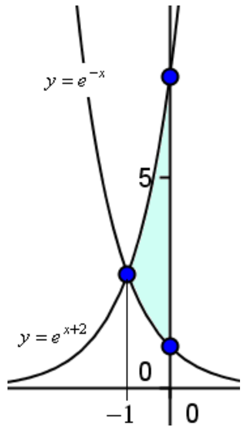
$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx = \left[2\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - (2\ln 1 - 1) = 2\ln 2 - 1 \text{ u}^2.$$

Por tanto, el área total del recinto vale $2\ln 2$ u^2.

26. Halla el área del recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 0$.

<u>Solución</u>:

El recinto pedido es el sombreado en la figura adjunta.



Corte de las curvas:

$$e^{x+2} = e^{-x} \Rightarrow x = -1$$

El área viene dada por:

$$\int_{-1}^{0}\left(e^{x+2} - e^{-x}\right)dx = \left(e^{x+2} + e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{0} = e^2 + e^0 - e^1 - e^1 = e^2 - 2e + 1$$

27. (Propuesto en Selectividad, Navarra)

Dadas las funciones $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

<u>Solución</u>:

Ambas gráficas pueden dibujarse dando algunos pares de valores.

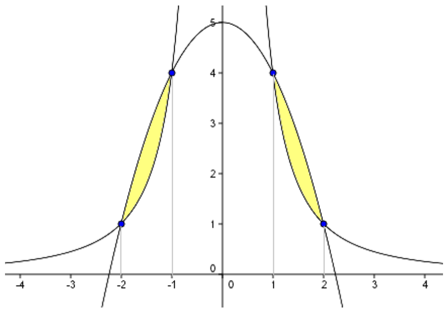
Se cortan en la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = 4/x^2 \end{cases} \Rightarrow 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1;\ \pm 2.$$

Los puntos de corte son:

(–2, 1); (–1, 4); (1, 4); (2, 1)



La región es la sombreada en la figura adjunta. Su área viene dada por:

$$A = \int_{-2}^{-1}\left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right)dx + \int_{1}^{2}\left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right)dx = 2\int_{1}^{2}\left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right)dx =$$

$$= 2\left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 = 2\left[\left(10 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right)\right] = 2\left(3 - \frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}\ \text{u}^2.$$

Teorema fundamental del cálculo integral

28. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, halla los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que:

$$\int_0^x \left(t^3 - t + 1\right)e^t dt = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x$$

Solución:
El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ se define como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es derivable en $[a, b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, si $\int_0^x \left(t^3 - t + 1\right)e^t dt = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x \Rightarrow F(x) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x$ es una primitiva de $f(x) = \left(x^3 - x + 1\right)e^x$.

Esto es: $F'(x) = \left[\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x\right]' = (x^3 - x + 1)e^x$

Luego:

$$\left(3ax^2 + 2bx + c\right)e^x + \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x = (x^3 - x + 1)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)\right)e^x = (x^3 - x + 1)e^x$$

Identificando coeficientes se obtiene: $a = 1$; $b = -3$; $c = 5$; $d = -4$.

29. (Propuesto en Selectividad)

Halla los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{(t^2-10t+24)}dt$.

Solución:

Sea $g(x) = \int_0^{2x} e^{(t^2-10t+24)}dt$.

Por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene:

$$g(x) = \int_0^{2x} e^{(t^2-10t+24)}dt = G(t)\Big|_0^{2x} = G(2x) - G(0) \rightarrow g(x) = G(2x) - G(0)$$

siendo $G'(t) = e^{t^2-10t+24}$.

Derivando:

$$g(x) = G(2x) - G(0) \Rightarrow g'(x) = \left(G(2x) - G(0)\right)' = G'(2x)\cdot 2 = 2e^{4x^2-20x+24}$$

Con esto, como $f(x) = -2x + g(x)$, se tendrá:

$$f'(x) = -2 + g'(x) = -2 + 2e^{4x^2-20x+24}$$

Si $f'(x) = 0$, entonces:

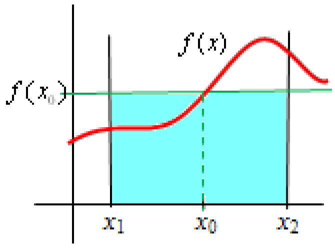
$$-2 + 2e^{4x^2-20x+24} = 0 \Rightarrow 2 = 2e^{4x^2-20x+24} \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = 3$$

30. Si f es una función continua en el intervalo [–2, 2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$, ¿se puede asegurar que existen dos números, b y c pertenecientes a [–2, 2], tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$?

<u>Solución</u>:

Por el teorema del valor medio del cálculo integral, se sabe que si $f(x)$ es continua en el intervalo [a, b], entonces existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = (x_2 - x_1)\cdot f(x_0)$$



Aplicando este teorema en el intervalo [–2, –1], puede asegurase que existe $b \in [-2, -1]$, esto es, $-2 < b < -1$, que verifica $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \left(-1-(-2)\right)\cdot f(b) = f(b)$

Análogamente, para el intervalo [1, 2], existe c, con $1 < c < 2$, tal que.

$$\int_{1}^{2} f(t)dt = (2-1)f(c) = f(c)$$

En consecuencia, como $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$, puede asegurarse que existen dos números b y c, pertenecientes a [–2, 2], tales que $b \leq -1$, $c \geq 1$ y $f(b) = f(c)$.

31. (Propuesto en Selectividad, Madrid)

Sea la función $F(x) = \int_{0}^{x^2} e^{-t^2} dt$.

a) Calcula $F´(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla sus máximos y mínimos.

b) Calcula $F´´(x)$ y estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$. Esboza la gráfica con los datos obtenidos.

<u>Solución</u>:

Por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$F(x) = \int_{0}^{x^2} e^{-t^2} dt = G(t)\Big|_0^{x^2} = G(x^2) - G(0), \text{ siendo } G´(t) = e^{-t^2}.$$

a) Derivando $F(x) = G(x^2) - G(0)$, se deduce:

$$F´(x) = G´(x^2)\cdot 2x \Rightarrow F´(x) = e^{-x^4}\cdot 2x \to$$ Esta derivada se anula en $x = 0$.

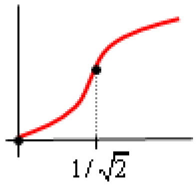
Para $x > 0$, $F´ > 0 \Rightarrow F$ será creciente. (Para $x < 0$ debe suponerse que la función no está definida; o, al menos, que no se sabe nada).

Luego, en $x = 0$ la función $F(x)$ tiene un mínimo, que será absoluto.

b) $F´´(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4e^{-x^4} = 2e^{-x^4}(1-4x^4) \Rightarrow F´´(x) = 0$ en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que es un punto de inflexión.

(La solución $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ cae fuera del dominio).

Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F'' > 0$, luego F es convexa ($\cup$).



Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F''<0$, luego F es cóncava ($\cap$).

Con esto, la gráfica de F puede ser la adjunta.

32. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Sea f una función real de variable real, continua y positiva, tal que $\int_0^x f(t)dt = e^x + \operatorname{arctg} x + a$.

Determina el valor de la constante a y halla $f(x)$ aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución:

Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt = e^x + \operatorname{arctg} x + a$.

En consecuencia, $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = e^0 + \operatorname{arctg} 0 + a = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$.

Como $F(t)$ es una primitiva de $f(t)$, se tendrá que:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$$

33. (Propuesto en Selectividad, La Rioja)

Sea la función $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$, definida para $x \geq 1$.

Halla sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral se tiene que si

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{, entonces } F'(x) = f(x)$$

Por tanto, en este caso, $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Los máximos y mínimos se dan en las soluciones de $F'(x) = 0$ que hacen negativa o positiva a $F''(x)$, respectivamente.

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k = 1, 2, 3\ldots$$

Derivada segunda: $F''(x) = \frac{(\cos x)\cdot x - \sin x}{x^2}$

Signo de la derivada segunda en los puntos $x = k\pi$, $k = 1, 2, 3\ldots$

- Si k es par: x = 2π, 4π,…, 2nπ, $F''(2n\pi)=\dfrac{1\cdot 2n\pi-0}{(2n\pi)^2}>0\ \Rightarrow$ Hay mínimos.
- Si k es impar: x = π, 3π,…, (2n + 1)π, $F''\big((2n+1)\pi\big)=\dfrac{-1\cdot(2n+1)\pi-0}{\big((2n+1)\pi\big)^2}<0\ \Rightarrow$ Hay

máximos.

Por tanto, $F(x)=\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ tiene máximos en los puntos x = π, 3π, 5π, …; y tiene mínimos cuando x = 2π, 4π, 6π, …

34. (Propuesto en Selectividad, Andalucía)
Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una primitiva de f tal que F(2) = 1 y F(3) = 2, calcula:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 \big(5f(x)-7\big)\,dx$

c) $\int_2^3 \big(F(x)\big)^2 f(x)\,dx$

Solución:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx = F(x)\big|_2^3 = F(3)-F(2)=2-1=1$.

b) $\int_2^3 \big(5f(x)-7\big)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx-\int_2^3 7\,dx = 5-\big(7x\big)\big|_2^3 = 5-21+14=-2$

c) $\int_2^3 \big(F(x)\big)^2 f(x)\,dx = \left.\dfrac{\big(F(x)\big)^3}{3}\right|_2^3 = \dfrac{\big(F(3)\big)^3}{3}-\dfrac{\big(F(2)\big)^3}{3}=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{1^3}{3}=\dfrac{7}{3}$

35. (Propuesto en Selectividad, Madrid)
Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du=3$. Halla $\int_1^2 f(x^3)\,x^2dx$.

Solución:
Si se hace $x^3=u\ \Rightarrow\ 3x^2dx=du$; y si x = 2, u = 8.
Con esto:

$$\int_1^2 f(x^3)\,x^2dx = \frac{1}{3}\int_1^2 f(x^3)\,3x^2dx = \frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du = \frac{1}{3}\cdot 3=1$$

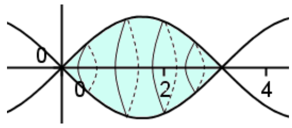
Volúmenes

36. Calcula el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje *OX* de la superficie limitada por la curva $y = \sin x$ y el eje *OX*, entre 0 y π.

Solución:

El volumen pedido vale:

$$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\ \text{u}^3.$$



Recuérdese que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

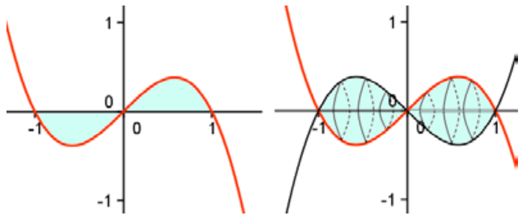
37. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje *OX* el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.

Solución:

La gráfica de $y = x - x^3$ es la adjunta.

Puede trazarse calculando los puntos de corte con los ejes y dando algunos valores.

El recinto plano se ha sombreado.



El volumen engendrado es:

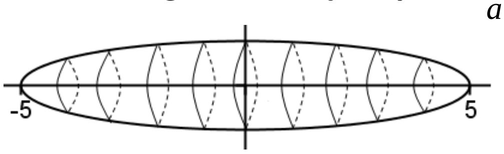
$$V = \pi\int_{-1}^{0} y^2 dx + \pi\int_0^1 y^2 dx = 2\pi\int_0^1 y^2 dx = 2\pi\int_0^1 \left(x - x^3\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{16\pi}{105}\ \text{u}^3.$$

38. Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor del eje *OX*.

Solución:

La elipse está centrada en el origen y tiene por semiejes: $a = 5$ y $b = 1$. (Recuérdese que la ecuación de una elipse centrada en el origen de semiejes *a* y *b* es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).



El volumen pedido viene dado por

$$V = \pi\int_{-5}^{5} y^2 dx = 2\pi\int_0^5 y^2 dx = 2\pi\int_0^5 \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = 2\pi\left[x - \frac{x^3}{75}\right]_0^5 = \frac{20}{3}\pi\ (\text{u}^3)$$

39. Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y = -\dfrac{x^2}{4} + x$ e $y = \dfrac{x^2}{4} - x$. Se pide:

a) El área del recinto finito determinado por dichas curvas.

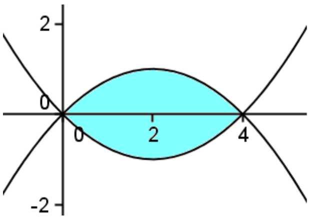
b) El volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje *OX*.

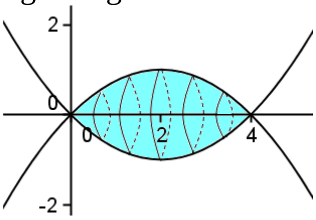
Solución:

Las curvas son dos parábolas. Dando algunos valores se pueden trazar y determinar los puntos de corte, que son x = 0 y x = 4: las soluciones de la ecuación

$$-\frac{x^2}{4}+x=\frac{x^2}{4}-x \Leftrightarrow x^2-4x=0.$$

El recinto que determinan es el sombreado en la figura siguiente.





a) El área encerrada entre esas curvas es:

$$A=\int_0^4\left(-\frac{x^2}{4}+x-\left(\frac{x^2}{4}-x\right)\right)dx=\int_0^4\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{6}+x^2\right)\Big|_0^4=-\frac{64}{6}+16=\frac{16}{3}\ \text{u}^2.$$

b) El volumen del cuerpo de revolución correspondiente vale:

$$V=\pi\int_0^4\left(-\frac{x^2}{4}+x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{2}+x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{80}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{15}\ \text{u}^3.$$

<u>Otros problemas</u>

40. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=x^2\sin x$ y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde *f* se anule.

<u>Solución</u>:

Los puntos de corte de $f(x)=x^2\sin x$ con el eje de abscisas son $x = k\pi$. El primer punto de abscisa positiva es $x = \pi$.

Como en el intervalo $[0, \pi]$ la función no toma valores negativos, el área pedida viene dada por la integral $\int_0^\pi x^2\sin x dx$

Una primitiva de $\int x^2\sin x dx$ se obtiene por el método de partes.

Haciendo: $x^2=u$ y $\sin x dx=dv \Rightarrow 2xdx = du$ y $-\cos x = v$

Luego, $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x+2\int x\cos x dx$

Para hacer la segunda integral, $\int x\cos x dx$, se aplica nuevamente el método de partes.

Tomando: $x = u$ y $\cos x\, dx = dv \Rightarrow dx = du$ y $v=\sin x$

Luego, $\int x\cos x dx = x\sin x-\int \sin x\, d\ \ = x\sin x+\cos x$

Por tanto: $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)$

En consecuencia,

$$\int_0^\pi x^2\sin x dx = \left[-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)\right]_0^\pi=-\pi^2(-1)-2-2=\pi^2-4$$

41. (Propuesto en Selectividad) El número de pasajeros que pasan por la terminal de un aeropuerto se ajusta durante un día determinado a la función $P(t) = 432t - t^3$, siendo t el tiempo en horas y $P(t)$ el número de viajeros en el momento t.

a) Representa la gráfica de la función en el contexto del problema. ¿Cuál fue la máxima afluencia del día y en qué momento se da?

b) ¿Qué cantidad de viajeros pasa por esa terminal desde las 0 horas hasta las 18 horas?

Solución:

a) $P(t) = 432t - t^3 = t(432 - t^2)$

Vale 0 en los instantes $t = 0$ y $t = \sqrt{432} \approx 20{,}78$ h ≈ 20 h 47 min.

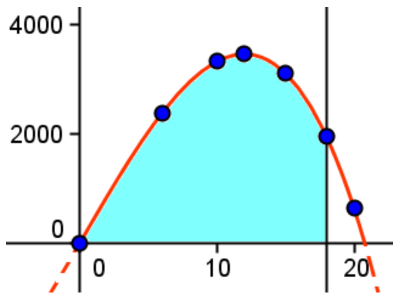
Derivando:

$P'(t) = 432 - 3t^2$, que se anula cuando $t = 12$.

Si $0 < t < 12$, $P'(t) > 0 \Rightarrow P(t)$ es creciente.

Si $12 < t < 24$, $P'(t) < 0 \Rightarrow P(t)$ es decreciente.

Por tanto, el máximo se da cuando $t = 12$, siendo el número de pasajeros $P(12) = 3456$.



Dando algunos valores más puede trazarse su gráfica, que es la adjunta.

Valores:

(0, 0); (6, 2376); (10, 3320); (12, 3456), máximo; (15, 3105); (18, 1944); (20, 640)

b) El número de viajeros que pasa por esa terminal entre las 0 y las 18 horas viene dado por el valor de la integral:

$$C = \int_0^{18} (432t - t^3)dt = \left[216t^2 - \frac{t^4}{4}\right]_0^{18} = 43740 \text{ pasajeros}$$

42. (Propuesto en Selectividad, Galicia) El tiempo, en horas, que tarda un autobús en hacer el recorrido entre dos ciudades es una variable aleatoria con función de densidad:

$f(x) = 0{,}3(3x - x^2)$, si $x \in [1, 3]$; y 0 en otro caso.

a) Calcula el tiempo medio que tarda en hacer el trayecto.

b) Calcula la probabilidad de que la duración del trayecto sea inferior a dos horas.

Solución:

a) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua definida en $[a, b]$, su media viene dada por $\mu = \int_a^b xf(x)dx$.

En este caso:

$$\mu = \int_1^3 x\cdot 0{,}3(3x - x^2)dx = \left[\frac{0{,}9x^3}{3} - \frac{0{,}3x^4}{4}\right]_1^3 = 2{,}025 - 0{,}225 = 1{,}8$$

b) Si X es la variable que mide el tiempo del trayecto, hay que hallar $P(X \le 2)$. O, lo que es lo mismo, $P(1 \le X \le 2)$. En el contesto del problema:

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 0{,}3(3x - x^2)dx = \left[\frac{0{,}9x^2}{2} - \frac{0{,}3x^3}{3}\right]_1^2 = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$$

43. Halla el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$, el eje de abscisas, y la recta *x* = *a*, siendo *a* la abscisa del punto máximo de la curva.

Solución:

Derivando se tiene:

$$y = xe^{-x^2} \Rightarrow y' = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y'' = -4xe^{-x^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$$

La derivada primera se anula si $(1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La derivada segunda es negativa en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y positiva en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto, el máximo se da en $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La curva corta al eje *OX* en *x* = 0; por tanto, el intervalo de integración es $\left[0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

En dicho intervalo la curva es siempre positiva, luego el área pedida es:

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}e^{-1/2} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

44. Sea $f(x)$ una función derivable en (0, 1) y continua en [0, 1], tal que *f*(1) = 0 y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizando la fórmula de integración por partes halla $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Si en la integral $\int 2xf'(x)dx$ se toma:

$$u = 2x \text{ y } f'(x)dx = dv \Rightarrow du = 2dx \text{ y } v = f(x)$$

Por tanto:

$$\int 2xf'(x)dx = 2xf(x) - \int 2f(x)dx \Rightarrow 2\int f(x)dx = 2xf(x) - \int 2xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = xf(x) - \frac{1}{2}\int 2xf'(x)dx$$

Luego:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(x)dx = 1\cdot f(1) - 0\cdot f(0) - \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

45. (Propuesto en Selectividad, Asturias) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) Calcula el área de ese recinto.

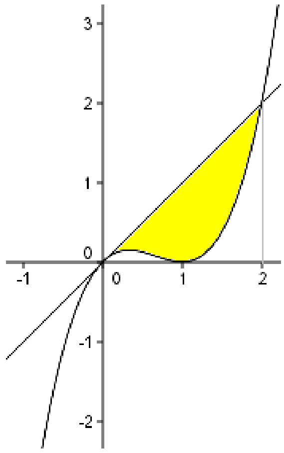
Solución:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1 \rightarrow y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Tangente en (0, 0): $y = x$.

b) La derivada se anula, $3x^2 - 4x + 1 = 0$, cuando $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} 1/3 \\ 1 \end{cases}$.

Como $y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''(1/3) < 0$; $y''(1) > 0$. Luego, en x = 1/3 se tiene un máximo y en x = 1, un mínimo.



La recta tangente corta a la curva cuando $x^3 - 2x^2 + x = x \Rightarrow$
$x = 0$ y $x = 2$.

Algunos puntos de la gráfica de la curva son:
(–1, –4); (0, 0); (1/3, 4/27), máximo; (1, 0), mínimo; (2, 2).

c) El recinto comprendido entre la recta y la curva es el sombreado en la figura adjunta. Como en el intervalo [0, 2] la recta va por encima de la curva, el área pedida viene determinada por la integral

$$A = \int_0^2 \left(x - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right) dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$