PROBLEMAS DE LÍMITES DE FUNCIONES (Por métodos algebraicos)

Observación: Algunos de estos problemas provienen de las pruebas de Selectividad.

1. Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿puede asegurarse que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.

Solución:

No puede asegurarse que el límite sea positivo. Basta con considerar la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = 0$. La función es positiva si $x < 0$ (y si $x > 0$) y su límite cuando $x \to 0$ vale 0.

Si puede asegurarse que su límite no es negativo. Es consecuencia de la definición de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \left| \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right.$$

Si el límite, L, fuese negativo se tendría que $|f(x) - L| < \varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para todo x tal que $0 < |x-a| < \delta$.

Como $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, tomando $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2} \Rightarrow f(x) < 0$, pues hemos dicho que $L < 0$; pero esto contradice la hipótesis de que $f(x) > 0$.

---

2. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4 - x^3 - x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2 - x - 6)}{\cancel{(x+2)}(x^3 + 2x^2 + x + 2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$ (Repetimos el proceso) $= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{(x+2)}(x^2+1)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-3}{x^2+1} = \dfrac{-5}{5} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4 - x^3 - x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(3x^3 - x^2 - x)}{x(x^2 - 4x + 5)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - x^2 - x}{x^2 - 4x + 5} = \dfrac{0}{5} = 0$

---

3. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2 - 2x - 3}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sqrt{x} - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2 - 2x - 3}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)}} = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sqrt{x} - 2}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)(2\sqrt{x} + 2)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4}{(x+1)\left(2\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

---

4. Estudia los límites laterales de $f(x)=e^{x/(x-1)}$ en el punto $x=1$.

Solución:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x/(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}} = e^{-\infty} = 0$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{x/(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}} = e^{+\infty} = +\infty$

---

5. Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}$.

Solución:
Si sustituimos en la expresión queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\left[\frac{\infty+\infty}{\infty(\infty-\infty)}\right].$$

Resulta una indeterminación no estándar. Para identificarla con más claridad operamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x}\left(x^2-(x^2+x+1)\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x}\left(-x-1\right)}=\left[\frac{\infty\cdot\infty}{\infty\cdot\infty}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

Volvemos a operar para determinar los grados del numerador y denominador (introducimos todos los factores en las raíces). Queda:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3+x^2+x}+\sqrt{x^3+2x^2+2x+1}}{-\sqrt{x^3+x}}=\text{(Dividiendo por }\sqrt{x^3}\text{)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1+1/x+1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1+2/x+2/x^2+1/x^3}}{-\sqrt{1+1/x^2}}=\frac{1+1+1+1}{-1}=-4$$

---

6. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Solución:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$ (multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$=$ (dividiendo cada uno de los términos por x) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\dfrac{2}{1+1}=1$

---

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1/2} 3^{1/(2x-1)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$ = (dividimos numerador y denominador por *x)* =

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}-\left(\dfrac{x-2}{x}\right)}{\dfrac{x-2}{x}} = \frac{\sqrt{1}-1}{1} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to 1/2} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{1/0}\right]$, que no existe. Puede ser de interés hacer los límites laterales.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1/2^-} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{1/0^-}\right] = \left[3^{-\infty}\right] = 0$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1/2^+} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{1/0^+}\right] = \left[3^{+\infty}\right] = +\infty$

---

8. Demuestra que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = [1]^{+\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$$

Solución:

Se transforman las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como sigue:

$$f(x) = 1 + f(x) - 1 = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}};\ g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)-1}\cdot g(x) = \frac{1}{f(x)-1}\cdot\left(f(x)-1)g(x)\right)$$

Por tanto, $\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)g(x)}$.

En consecuencia:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)g(x)} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$$

En el último paso se utiliza la definición de *e* y una de las propiedades de los límites.
Recuerda:

<u>Definición</u>: $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; y en general $e = \lim\limits_{A(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{A(x)}\right)^{A(x)}$

<u>Propiedad</u>: $\lim\limits_{x\to a}\left(A(x)^{B(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x\to a} A(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a} B(x)\right)}$

---

9. Dada la función $f(x)=\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}$, calcula el valor de a para que

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=e^{-1}$.

Solución:
Se trata de una indeterminación de la forma $[1^{\infty}]$. Puede resolverse aplicando la regla anterior: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)}=[1]^{+\infty}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$

Hallamos antes $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}-1\right)\cdot(ax+2)\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x}{3x^2}\right)\cdot(ax+2)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+2x}{3x^2}=\frac{a}{3}$$

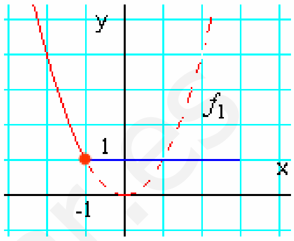
Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{3x^2+x}{3x^2}-1\right)\cdot(ax+2)\right]}=e^{a/3}$

Como se desea que el límite valga $e^{-1}\Rightarrow e^{-1}=e^{a/3}\Rightarrow a=-3$.

CONTINUIDAD

10. Estudia para qué valores de a las funciones $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le a \\ a+2, & \text{si } x>a \end{cases}$ son continuas.

Solución:
El único punto que presenta dificultades es $x = a$. La función será continua en ese punto (que pueden ser varios, lo que explica el plural de funciones del enunciado), cuando los límites laterales coincidan con $f(a)$ que vale a^2.



Por la izquierda::

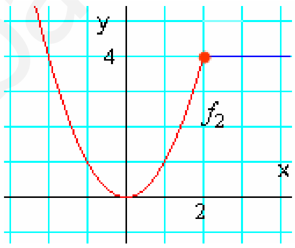
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} x^2 = a^2$$

Por la derecha;

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (a+2) = a+2$$

Como deben ser iguales:

$$a^2 = a+2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a=-1 \text{ o } a=2.$$



Si $a=-1$, la función es: $f_1(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le -1 \\ 1, & \text{si } x>-1 \end{cases}$

Si $a=2$, la función es: $f_2(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 2 \\ 4, & \text{si } x>2 \end{cases}$

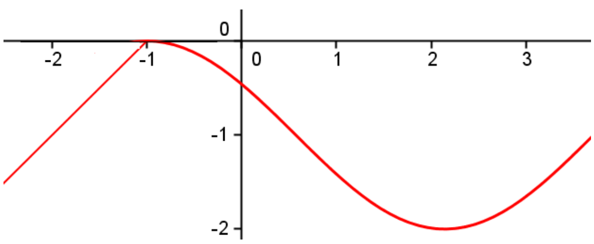
Las gráficas de estas funciones son las dibujadas al margen.

11. Determina el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases} x-a & \text{si } x<a \\ a+\cos(x-a) & \text{si } x\ge a \end{cases}$ sea continua.
Representa la función continua hallada.

Solución:
Punto dudoso, $x = a$. Hay que estudiar los límites laterales:
– por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} (x-a) = 0$
– por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (a+\cos(x-a)) = a+1$
Como ambos límites deben coincidir $\Rightarrow\ 0 = a+1 \Rightarrow a=-1$:

Si $a=-1$, la función es $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<-1 \\ -1+\cos(x+1) & \text{si } x\ge -1 \end{cases}$

Su gráfica es:



12. Determina el valor que ha de tener *k* para que la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3kx+5}{x-2}$ tenga límite cuando *x* tiende a 2 (es decir, existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$) y calcula el valor que tendrá ese límite.

Solución:
La única posibilidad para que la función tenga límite es que el numerador se anule para x = 2, dando lugar a una forma indeterminada el tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Por tanto: $8-6k+5=0 \Rightarrow k=\dfrac{13}{6}$

La función será: $f(x)=\dfrac{2x^2-\dfrac{13}{2}x+5}{x-2}=\dfrac{4x^2-13x+10}{2(x-2)}$.

Su límite vale: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(4x-5)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{2}=\dfrac{3}{2}$

---

13. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<1 \\ 3/(x-2) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

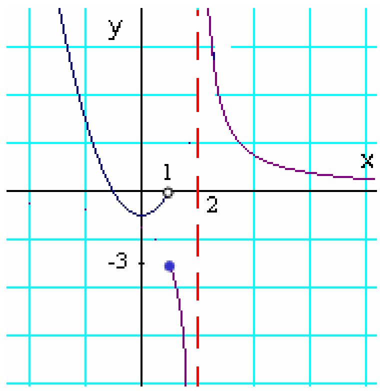
Solución.
Para $x<1$, $f(x)=x^2-1$ es continua, pues los polinomios siempre son funciones continuas.

Para $x>1$, $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ no es continua en $x=2$, pues en ese punto no está definida.

Para $x=1$ hay que estudiar los límites laterales:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$;

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3}{-1}=-3$

Como no coinciden la función no es continua en $x=1$.
Así pues, los puntos de discontinuidad son $x=1$ y $x=2$.



La gráfica de esta función es la adjunta.

---

14. Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \dfrac{\tan(x)}{x}$.

Nota: x está expresado en radianes.

Solución:

La función es discontinua los puntos en los que no esté definida, que son: $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

En $x = 0$ la discontinuidad es evitable, pues $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

En $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k $\in$ **Z,** porque la tg(x) no está definida. En todos esos puntos la discontinuidad no puede evitarse

---

15. La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para x = 0. Definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto.

Solución:

Para que f(x) sea continua en x = 0,

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

16. Aplicando el teorema de Bolzano halla un intervalo en el que las siguientes funciones corten al eje de abscisas:

a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ b) $g(x) = x - 4\cos x$ c) $h(x) = e^x - 3x$

Solución:

Las tres funciones dadas son continuas en todo **R**.

a) Como $f(0) = 1$ y $f(-1) = -2$, la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$ corta al eje de abscisas en el intervalo (−1, 0).

b) Como $g(0) = -3$ y $g(\pi/2) = \dfrac{\pi}{2}$, la función $g(x) = x - 4\cos x$ corta al eje *OX* en el intervalo (0, π/2)

c) La función $h(x) = e^x - 3x$ cumple que $h(0) = 1$ y $h(1) = e - 3 < 0$. Por tanto, corta al eje *OX* en el intervalo (0, 1)

---

17. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$:

a) ¿Cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 3]?

b) ¿Y en el intervalo [3, 5]?

Solución:

a) La función dada no cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 3], pues no es continua en x = 2 que pertenece a dicho intervalo.

b) Aunque la función es continua en todo el intervalo [3, 5] no podemos asegurar que cumpla el teorema, pues la toma el mismo signo en ambos extremos: $f(3) = 10 > 0$ y $f(5) = 26/3 > 0$.

---

18. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. ¿Podemos afirmar que la función toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]? Razona la respuesta.

Solución:

Considera la función $g(x) = f(x) - \sqrt{2}$; esto es: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5 - \sqrt{2}$.

Esta función es continua siempre; en particular en el intervalo [1, 2].

Además:

$$g(1) = 3 - \sqrt{2} > 0 \quad \text{y} \quad g(2) = 1 - \sqrt{2} < 0$$

Por tanto cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. En consecuencia, existe un punto $x_0 \in (1, 2)$ tal que $g(x_0) = 0$. Esto es,

$$x_0^{\,3} - 3x_0^{\,2} + 5 - \sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow\; x_0^{\,3} - 3x_0^{\,2} + 5 = \sqrt{2}$$

La última ecuación expresa que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ toma el valor $\sqrt{2}$ en el punto x_0 del intervalo [1, 2], que era lo que deseábamos demostrar.

---

19. Dadas las funciones $f(x) = (x^3 - 2)e^x$ y $g(x) = (x+1)\cos x$ demuestra que existe al menos un punto a en el intervalo $[0, \pi]$ en el cual $f(a) = g(a)$.

Solución:
Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Esto es: $h(x) = (x^3 - 2)e^x - (x+1)\cos x$
Esta función es continua en el intervalo $[0, \pi]$.
Además: $h(0) = -2e^0 - \cos 0 = -3 < 0$ y $h(\pi) = (\pi^3 - 2)e^\pi - (\pi + 1)(-1) > 0$.
Por tanto, cumple las hipótesis de Bolzano. En consecuencia, existe un punto $a \in [0, \pi]$ tal que $h(a) = 0$. Pero,

$$h(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) - g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = g(a).$$

---

20. Aplicando el teorema de Bolzano, encuentra en el intervalo (2, 3) una raíz aproximada hasta el orden de milésimas de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 2x + 9 = 0$.

Solución:
Se considera la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 9$, que es continua en todo **R**.
Nuestra pretensión es encontrar un valor x_0 que cumpla que $f(x_0) \approx 0$, con la condición de que se diferencie de la raíz exacta menos de 0,005.
Como:

- $f(2) = 1$; $f(3) = -3$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2, 3).
- $f(2{,}5) = -1{,}625$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2, 2,5).
- $f(2{,}2) = -0{,}152$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2, 2,2).
- $f(2{,}1) = 0{,}411$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2,1, 2,2).
- $f(2{,}15) = 0{,}125875$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (215, 2,20).
- $f(2{,}17) = 0{,}013813$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2,17, 2,20).
- $f(2{,}18) = -0{,}041768$ $\Rightarrow$ la solución está en el intervalo (2,17, 2,18).

Por tanto, x_0 = 2,175 cumple el objetivo buscado.
