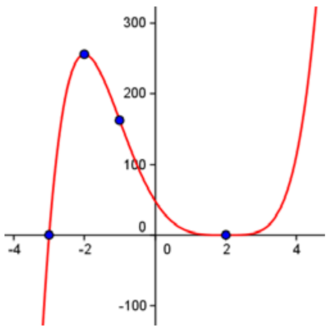
TEMA 9. Aplicaciones de las derivadas: Representación gráfica de funciones y Optimización
Problemas Resueltos

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión

1. Dada la función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$, determina:
a) Los puntos de corte con el eje *OX*; y su signo.
b) Sus máximos y mínimo.
c) Sus puntos de inflexión.
Solución:
a) Cortes con el eje *OX*:
Son las soluciones de la ecuación $f(x) = (x+3)(x-2)^4 = 0 \Rightarrow x = -3$; $x = 2$.
El signo sólo depende del factor $x + 3$. Por tanto: la función toma valores negativos si $x < -3$; y positivos, en caso contrario.

b) Derivando:
$$f'(x) = (x-2)^4 + 4(x+3)(x-2)^3 = 5(x-2)^3(x+2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = 15(x-2)^2(x+2) + 5(x-2)^3 = 20(x-2)^2(x+1)$$
La derivada primera se anula en $x = -2$ y $x = 2$.
Como $f''(-2) = -80 < 0$, en $x = -2$ se da un máximo. Punto $(-2, 256)$.
Como $f''(2) = 0$, en $x = 2$ no puede afirmarse que haya máximo o mínimo; puede darse un punto de inflexión.

c) La derivada segunda se anula en $x = -1$ y $x = 2$. Estos dos puntos pueden ser de inflexión. Para asegurarlo hay que hacer la derivada tercera y comprobar que es distinta de cero.
$$f'''(x) = 40(x-2)(x+1) + 20(x-2)^2 = 60x^2 - 120x$$
Como $f'''(-1) = 180 \neq 0$, en $x = -1$ se da un punto de inflexión: $(-1, 162)$.
Como $f'''(2) = 0$, todavía no puede determinarse qué pasa en $x = 2$. Hay que seguir derivando:
$$f^{(4}(x) = 120x - 120$$
Al ser $f^{(4}(2) = 120 > 0$, en $x = 2$ se da un mínimo relativo.
(Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta).



2. Comprueba que la función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$ es decreciente en todo su dominio.
Solución:
Dominio de definición: intervalo (0, 2] → Los valores de *x* tales que $\frac{2}{x} - 1 > 0$.
Derivando:
$$y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}}$$

Como el numerador es negativo y el denominador siempre es positivo $\Rightarrow$ $y' < 0$ para todo x del dominio. En consecuencia, la función es decreciente en (0, 2].

3. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ en el intervalo [0, 2].

Solución:
Derivada:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2-\cos x) - \sin x \cdot \sin x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

Se anula en $x = \pi/3$ y en $x = 5\pi/3$, que son las soluciones de $2\cos x - 1 = 0$.
Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(2-\cos x)^2 - (2\cos x - 1)\cdot 2(2-\cos x)\cdot \sin x}{(2-\cos x)^4} =$$

$$= \frac{-2\sin x(2-\cos x) - (2\cos x - 1)\cdot 2\cdot \sin x}{(2-\cos x)^3} = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

Como $f''(\pi/3) < 0$, en $x = \pi/3$ se da un máximo.
Como $f''(5\pi/3) > 0$, en $x = 5\pi/3$ se da un mínimo.

4. Halla los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.
Solución:

$$f(x) = x - \ln(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^2-2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

La derivada segunda se anula en $x = \pm 1$. Ambos son puntos de inflexión. Para cerciorarse puede verse que la derivada segunda toma signos distintos a izquierda y derecha de $x = 1$ y de $x = -1$. También puede hacerse la derivada tercera: $f'''(x) = \dfrac{12x - 4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$, y comprobar que no se anula en ninguno de esos puntos.

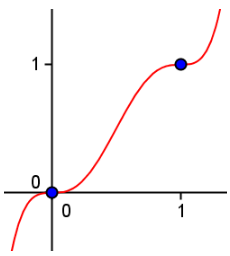
5. Demuestra que la función $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ nunca es decreciente. ¿Es posible que, a pesar de lo anterior, tenga puntos de inflexión?
Solución:
Derivadas: $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 \Rightarrow f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x$
Puntos singulares:

$$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1.$$

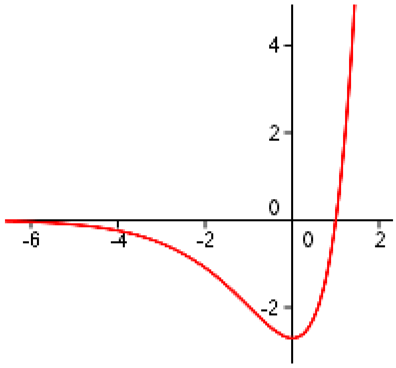
La derivada nunca toma valores negativos, pues es producto de dos expresiones de potencia par. En consecuencia, nunca es decreciente.
Como $f''(0) = 0$ y $f''(1) = 0$, en $x = 0$ y $x = 1$ puede haber puntos de inflexión. Para determinarlo hay que estudiar la derivada tercera, que es:

$$f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60$$

Como $f'''(0) = 60 \neq 0$ y $f'''(1) = 60 \neq 0$, en $x = 0$ y en $x = 1$ se tienen sendos puntos de inflexión (con tangente horizontal). Otra consecuencia es que esta función no tiene máximos ni mínimos.
La función es como se indica.



6. Dada la función $f(x) = (x-1)e^{x+1}$, halla:
a) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos y mínimos.
b) Sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y convexidad.
Solución:
a) Derivada primera: $f´(x) = xe^{x+1}$.
Esta derivada se anula en $x = 0$.
A la izquierda de $x = 0$, como $f´(x) < 0$, la función es decreciente. A su derecha, es creciente, pues $f´(x) > 0$.



b) Derivada segunda: $f´´(x) = (x+1)e^{x+1}$.
Se anula en $x = -1$.
Para $x < -1$, $f´´(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$).
Para $x > -1$, $f´´(x) > 0 \Rightarrow f$ e es convexa ($\cup$).
Por tanto, en $x = -1$, como cambia de curvatura, la función tiene un punto de inflexión.
(Aunque no se pide, se da su gráfica).

7. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión.
Solución:
Cálculo del punto de inflexión:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f´(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f´´(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

La tangente es:

$$y - f(-1) = f´(-1)(x+1) \Rightarrow y - 2 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 1$$

Estudio de una función dependiente de uno o más parámetros

8. Halla el valor que debe tomar a para que la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x+2}$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.
Solución:
Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$ debe cumplirse que: $f´(2) = 0$ y $f´´(2) > 0$

$$f´(x) = \frac{(6x-a)(x+2) - (3x^2 - ax)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$$

Si $f´(2) = \dfrac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$.
Puede verse que, para ese valor de $a = 18$, $f´´(2) > 0$.
En efecto:

$$f´´(x) = \frac{96}{(x+2)^3} \to f´´(2) = \frac{96}{64} > 0.$$

9. Estudia los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$ dependiendo de los valores de a.
Solución:
Derivando:

$$f´(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$$

La derivada se anula cuando $x = 0$ o $x = -2a/3$. En esos puntos pueden darse máximos o mínimos.
Como $f''(x) = 6x + 2a$,

- Para $x = 0$, $f''(0) = 2a \neq 0$ si $a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay máximo si $a < 0$, y mínimo si $a > 0$.
- Para $x = -2a/3$, $f''(-2a/3) = -2a \neq 0 \Rightarrow$ en $x = -2a/3$ hay mínimo si $a < 0$, y máximo si $a > 0$.

Resulta evidente que si $a = 0$, $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$. En este caso la función tendía un punto de inflexión en $x = 0$.

10. Halla el valor de a para que $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x}$ tenga un punto de inflexión en $x = 2$.

Solución:
Se deriva dos veces:

$$f(x) = ax^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2a + \frac{2}{x^3}$$

Para que se tenga un punto de inflexión en $x = 2$ debe cumplirse que $f''(2) = 2a + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$a = -\dfrac{1}{8}$.

La función será $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{x}$.

11. Comprueba que la función $f(x) = e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 0$ para cualquier valor de p. ¿Tendrá algún punto de inflexión?
Solución:

$$f'(x) = 2xe^{p+x^2} \Rightarrow x = 0 \text{ es punto singular.}$$

Como $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{p+x^2} \Rightarrow f''(0) > 0$. Por tanto en $x = 0$ tiene un mínimo; su valor es $f(0) = e^p$.

Como la derivada segunda no se anula en ningún punto, la función no tiene puntos de inflexión.

12. Halla el valor de p para que la función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tenga:
a) Un mínimo.
b) Un máximo.
c) Un punto de inflexión.
Solución:

$$f'(x) = -e^{-x} + p = 0 \Rightarrow e^{-x} = p \Rightarrow x = -\ln p \text{ (posible máximo o mínimo)}$$

$$f''(x) = e^{-x} \to f''(-\ln p) = p.$$

Por tanto:
a) Si $p > 0$, $f''(-\ln p) > 0$. Luego, en $x = -\ln p$ hay un mínimo.
b) Si $p < 0$, no está definido $\ln p$; luego, $x = -\ln p$ no es punto singular. No hay máximo.
c) Como $f''(x) = e^{-x} \neq 0$ para todo x, la función no tiene puntos de inflexión.

13. Sea la función $f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10$, $a \neq 0$.

a) Halla los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcula los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$.

Solución:

a) Para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$ es necesario que $f\,'(1) = 0$ y $f\,''(1) < 0$.

Derivando:

$$f'(x)=\frac{3x^2}{a}-2ax+5 \Rightarrow f''(x)=\frac{6x}{a}-2a$$

Si $f\,'(1) = 0$, entonces:

$$\frac{3}{a}-2a+5=0 \Rightarrow -2a^2+5a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \text{ o } a = 3.$$

- Si $a=-\frac{1}{2}$, $f''(x)=-12x+1$ y $f''(1)=-11$.
- Si $a = 3$, $f''(x)=2x-6$ y $f''(1) = -4$

Por tanto, la función tiene un máximo en $x = 1$ en los dos casos.

Obsérvese que las funciones serían, respectivamente,

$$f(x)=-2x^3+2x^2+5x+10 \text{ y } f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10$$

b) Para $a = 3$ la función y sus derivadas son:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10 \Rightarrow f'(x)=x^2-6x+5 \Rightarrow f''(x)=2x-6$$

La derivada primera se anula en: $x = 1$ y $x = 5$.

Como $f''(1)=-4$, en $x = 1$ hay un máximo relativo; punto (1, 35/3)

Como $f\,''(5) = 4$, en $x = 5$ hay un mínimo relativo; punto (5, 5/3).

14. (Propuesto en Selectividad, Castilla la Mancha)

Calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x)=ax+b+\frac{4}{x}$ pase por el punto (–1, –3) y admita en ese punto una tangente horizontal.

Solución:

$$f(x)=ax+b+\frac{4}{x} \Rightarrow f'(x)=a-\frac{4}{x^2}$$

Por pasar por (–1, –3): $-3 = -a + b - 4 \Rightarrow -a + b = 1$

Si la tangente es horizontal, entonces $f\,'(-1) = 0 \Rightarrow 0 = a - 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 5$

La función es $f(x)=4x+5+\frac{4}{x}$

(Puede comprobarse que en el punto (–1, –3) la función tiene un máximo relativo).

15. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto (1/2, 4).
b) Para esos valores de a y b, calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Esboza su gráfica.
Solución:

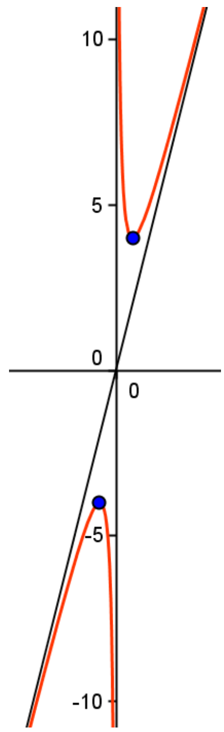
a) Por pasar por (1/2, 4) $\Rightarrow$ $f(1/2) = 4 \to 4 = a\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{1/2} \Rightarrow a + 4b = 8$

Por tener un mínimo en x = 1/2, $f'(1/2) = 0$.

Como $f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2} \Rightarrow f'(1/2) = 0 = a - \dfrac{b}{1/4} \Rightarrow a - 4b = 0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + 4b = 8 \\ a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow$ a = 4; b = 1

La función es $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.



b) La función no está definida en x = 0, punto en el que tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x \to 0}\left(4x + \dfrac{1}{x}\right) = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, la recta $y = 4x$, pues

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(4x + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty}(4x)$

La derivada $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$ se anula cuando $x = \pm 1/2$.

Por tanto:

- Si $x < -1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1/2 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -1/2$ hay un máximo. Punto (–1/2, –4).

- Si $0 < x < 1/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

En x = 1/2 hay un mínimo. Punto (1/2, 4).

Puede observarse que la función es impar.

16. (Propuesto en Selectividad)
De la función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe: tiene un máximo en $x = -1$; su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$; tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0.
Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9.
Solución:
Se tiene:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Por máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \Rightarrow 0 = 3a - 2b + c$
Por cortar al eje en $x = -2$, $f(-2) = 0 \Rightarrow 0 = -8a + 4b - 2c + d$
Por punto de inflexión en $x = 0$, $f''(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2b \to b = 0$
En $x = 2$, la pendiente de la tangente vale 9 $\Rightarrow f'(2) = 9 \Rightarrow 9 = 12a + 4b + c$

Resolviendo el sistema se tiene: $b = 0$; $a = 1$; $c = -3$; $d = 2$

Luego, la función es $f(x) = x^3 - 3x + 2$

17. Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje *OY* en el punto (0, –1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje *OX*.
Representa gráficamente la función obtenida dando algunos de sus puntos.
Solución:
Se deriva dos veces:

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6x + 2b$$

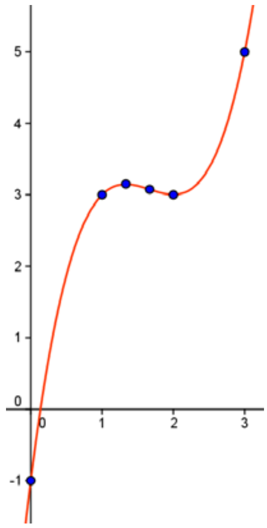
Que la tangente en el punto (2, 3) sea horizontal significa que su pendiente es 0, que $y'(2) = 0 \Rightarrow 0 = 12 + 4b + c$
Por pasar por (0, –1) $\Rightarrow -1 = \quad d$
Por pasar por (2, 3) $\Rightarrow 3 = 8 + 4b + 2c + d$
Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones se obtiene: $b = -5$; $c = 8$; $d = -1$.

La función será: $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$

Sus derivadas son:

$$y' = 3x^2 - 10x + 8; \quad y'' = 6x - 10$$

$y' = 0$ en $x = 2$ y $x = 4/3$
Como $y''(2) = 2 > 0$ e $y''(4/3) = -2 < 0$, en $x = 2$ hay un máximo y en $x = 4/3$, un mínimo.



La derivada segunda se anula en $x = 5/3$, y como $y''' = 6 \neq 0$, en ese punto se da una inflexión.

Algunos puntos de la curva son:
(0, –1); (1, 3); (4/3, 3,15), máximo relativo; (5/3, 3,07), PI;
(2, 3), mínimo relativo; (3, 5)

Representación gráfica de una función

18. Dada la función $f(x) = x^5 - 5x^3$:
a) Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento; y sus máximos relativos.
b) Determina sus intervalos de concavidad y convexidad; y sus puntos de inflexión.
c) Traza su gráfica.
Solución:
a) Derivando se tiene:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 30x$$

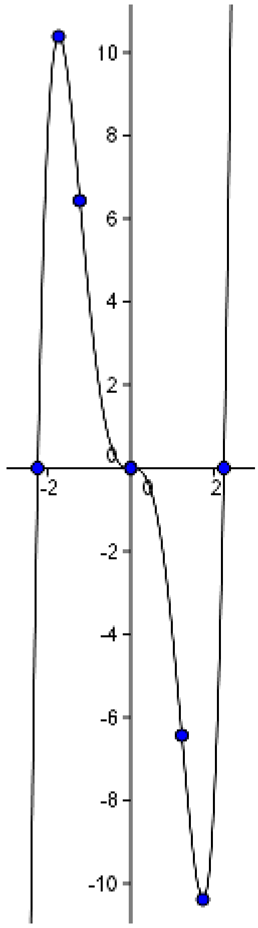
$\to f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \pm\sqrt{3}$.

- Si $x < -\sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-\sqrt{3} < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Por tanto, en $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo.

- Si $0 < x < \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x > \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Por tanto, en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo.
La confirmación de máximo y mínimo podría verse, además, con la derivada segunda:
Como: $f''(-\sqrt{3}) < 0$, en $x = -\sqrt{3}$ se tiene un máximo;
$f''(+\sqrt{3}) > 0$, en $x = +\sqrt{3}$ se tiene un mínimo.



b) La derivada segunda $f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$ se anula en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3/2}$.
Esos tres puntos son de inflexión, pues $f'''(x) = 60x^2 - 30 \neq 0$ en los tres valores.

c) Dando algunos valores puede trazarse su gráfica.
Puntos:
(–2,24, 0); (–1,73, 10,39); (–1,22, 6,43); (0, 0); (1,22, –6,43); (1,73, –10,39) (2,24, 0).

19. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$, se pide:
a) Su dominio, posibles simetrías y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sus máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.
d) Su representación gráfica.
Solución:
a) Dominio: **R** – {–1, 1}. Es simétrica respecto del origen (impar), pues $f(x) = -f(-x)$.
En los puntos x = –1 y x = 1 puede tener asíntotas.
Como:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \Rightarrow \text{La recta } x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty \Rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ también es una asíntota vertical.}$$

Tiene otra asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \text{ y}$$

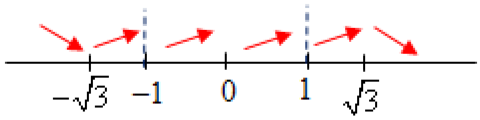
$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

La asíntota es la recta $y = -x$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2x(3x^2+3)}{(1-x^2)^3}$

$f'(x) = 0$ en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

- Si $x < -\sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-\sqrt{3} < x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.



Por tanto, en $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo.

- Si $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $1 < x < \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = \sqrt{3}$ hay un máximo.

(También puede verse que Si $f''(-\sqrt{3}) > 0$ y $f''(\sqrt{3}) < 0$, lo que confirma que en $x = -\sqrt{3}$ hay un mínimo y en $x = \sqrt{3}$ hay un máximo).

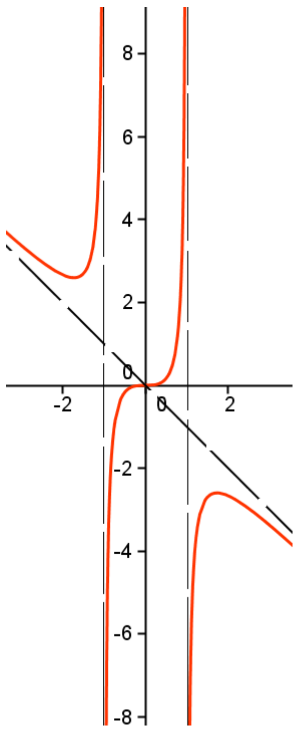
Como a la izquierda y derecha de $x = 0$ la función es creciente, en ese punto se da una inflexión. También puede verse que $f''(0) = 0$.

El valor de la función en los puntos críticos es:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(0) = 0,\ f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Crecimiento: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Decrecimiento: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$



c) $f''(x) = 0$ si $x = 0$. En $x = 0$ hay punto de inflexión; punto (0, 0). Se confirma viendo que la derivada segunda cambia de signo en ese punto.

Efectivamente:

Si $x < -1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).

Si $-1 < x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

Si $0 < x < 1$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).

Si $x > 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).

d) Con la información obtenida y calculando algunos puntos más se puede trazar su gráfica.

20. Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad.

b) Haz su representación gráfica.

<u>Solución</u>:

a) Dominio: **R** – {1}.

La recta $x = 1$ es asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 1} = \dfrac{4x^2-3x}{x-1}=\infty$.

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$. Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$.

También tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x}{x(x-1)}=4 \text{ y}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-3x}{x-1}-4x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

La asíntota es la recta $y = 4x + 1$

Derivadas:

$$f'(x)=\frac{(8x-3)(x-1)-(4x^2-3x)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

- $f'(x) = 0$ cuando $x=1/2$ o $x=3/2$

Como $f''(1/2)<0$, en $x=1/2$ hay un máximo.

Como $f''(3/2)>0$, en $x=3/2$ hay un mínimo.

El valor de la función en los puntos críticos es: $f(1/2)=1$, $f(3/2)=9$.

- Si $x<1/2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $1/2<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $1<x<3/2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x>3/2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

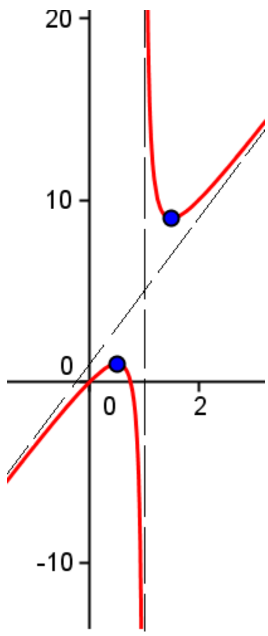
Crecimiento: $(-\infty, 1/2)\cup(3/2, \infty)$.

Decrecimiento: $(1/2, 1)\cup(1, 3/2)$

- $f''(x)\neq 0$ para todo x de su dominio: no hay puntos de inflexión.

Como para $x < 1$, $f''(x)<0$, la función es cóncava (∩) en el intervalo en $(-\infty, 1)$.

Como para $x > 1$, $f''(x)>0$, la función es convexa (∪) en el intervalo $(1, \infty)$.

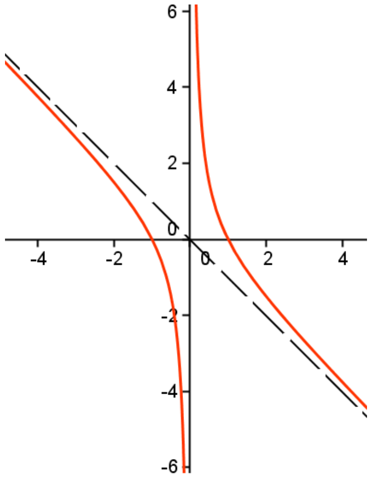


b) Con la información obtenida y calculando algunos puntos más se puede trazar su gráfica.

21. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

Solución:
– Dominio = **R** – {0}. Es evidente que en $x = 0$ tiene una asíntota vertical.
– La función es impar: $f(-x) = -f(x)$.
– Como $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$, la recta $y=-x$ es una asíntota oblicua. También puede verse que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=n$$



Derivadas:

$f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{x^2}<0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}\Rightarrow f''<0$ si x < 0: cóncava (∩);

$f''>0$ si $x > 0$: convexa (∪).

Algunos valores:
(–1, 0); (1, 0); (–2, 3/2); (2, –3/2); (–3, 8/3); (3, –8/3)

22. Representa gráficamente la función $f(x)=xe^x$, calculando: asíntotas; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión.
Solución:
Como la función está definida en todo **R**, no tiene asíntotas verticales.
Para ver si tiene una asíntota horizontal se hace $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=[-\infty\cdot 0]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\left[\frac{1}{-\infty}\right]=0\Rightarrow$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (hacia menos infinito).
Como $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=[\infty\cdot\infty]=\infty$, hacia $+\infty$ no hay asíntota.
Se deriva:

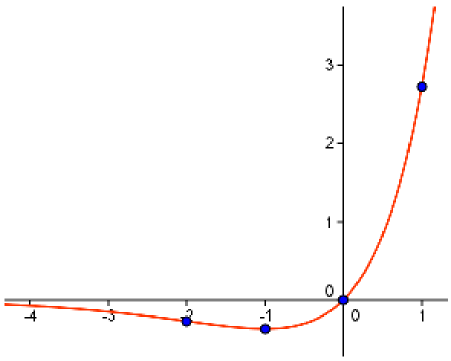
$$f(x)=xe^x \Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x \Rightarrow f''(x)=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$$

La derivada se anula en $x = -1$.
- Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece: intervalo $(-\infty, -1)$
- Si $x > -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece: intervalo $(-1, +\infty)$.

Es evidente que en $x = -1$ hay un mínimo.

La derivada segunda se anula en $x = -2$.
- Si $x < -2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).
- Si $x > -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).

En $x = -2$ hay un punto de inflexión.



Con la información obtenida y dando algunos valores se puede trazar su gráfica; que es la adjunta.
$(-2, -2e^{-2}) \approx (-2, -0{,}27)$; $(-1, -e^{-1}) \approx (-1, -0{,}37)$; $(0, 0)$; $(1, e)$

23. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

a) Dominio de definición y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Extremos locales y los puntos de inflexión.
d) Un esbozo gráfico.

Solución:

a) Dominio = **R**: el denominador nunca se anula.

Tiene una asíntota horizontal, pues: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x+1)}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Derivando:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{(x+1)(1-x)}{e^x}$$

La derivada se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.
Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un mínimo.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 1$ hay un máximo.

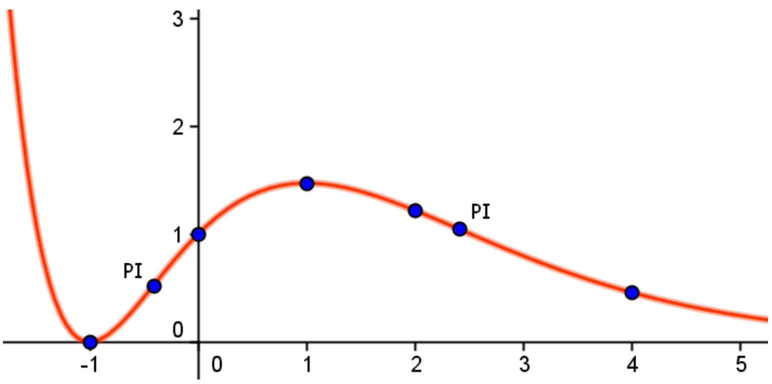
c) Para la determinación de máximos y mínimos también puede utilizarse la derivada segunda.

$$f''(x)=\frac{-2xe^x-(1-x^2)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$$

Como $f''(-1)=2/e^2>0$, en $x = -1$ hay un mínimo.
Por ser $f''(1)=-2/e^2<0$, en $x = 1$ se tiene un máximo.
La derivada segunda se anula cuando $x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$ y $x=1-\sqrt{2}$. Para esos valores de x se tienen sendos puntos de inflexión.

d) Calculando el valor de $f(x)$ en algunos puntos se puede hacer un esbozo de la curva.
Puntos:
$(-1, 0)$, mínimo; $(1-\sqrt{2}$, 0,517), PI; (0, 1); $(1, 4/e) \approx$ (1, 1,47), máximo; $(2, 9/e^2) \approx$ (2, 1,22);
$(1+\sqrt{2}$, 1,05), PI; (4, 0,46)

Con todo lo anterior se traza la siguiente curva.



24. (Propuesto en Selectividad)

Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$, determinando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

<u>Solución</u>:

La función puede definirse a trozos como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x}, & x<0\\[2mm] \dfrac{x}{2-x}, & x\geq 0-\{2\}\end{cases}$$

Por tanto, Dom(f) = **R** – {2}.

En el punto x = 2 la curva tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{2-x}=\infty$.

Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$.
Cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$.

Por otra parte, las rectas y = 1 e y = –1 son asíntotas horizontales de la función. La primera, y = 1, hacia –∞; la segunda, y = –1, hacia +∞.

En efecto:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2-x}=1 \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-x}=-1$$

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 1^-$ (la curva va por debajo de la asíntota.)
Cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to -1^-$ (la curva va por debajo de la asíntota.)

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(2-x)^2}, & x<0\\[2mm] \dfrac{2}{(2-x)^2}, & x>0-\{2\}\end{cases}$$

Como puede verse fácilmente, la función tampoco es derivable en x = 0, pues por la izquierda su derivada es negativa (tiende a –1/2) y por la derecha es positiva (tiende a 1/2).

También es inmediato ver que:

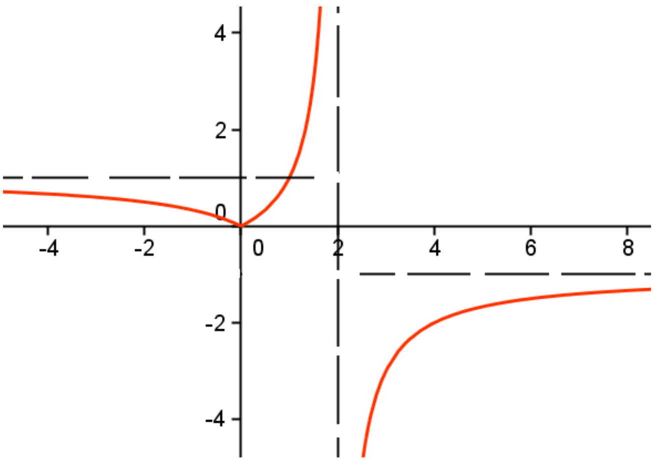
- si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente;
- si $x > 0 - \{2\}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Con la información obtenida y dando algunos valores podemos dibujar la gráfica.

Valores:

(–2, 1/2); (–1, 1/3); (0, 0); (1, 1); (1,5, 3); (2,5, –5); (3, –3); (4, –2); (6, –3/2)

La gráfica pedida es la adjunta.



25. (Propuesto en Selectividad)

Sea f la función dada por $f(x)=x^2-3|x|+2, \quad x\in R$.

a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.
b) Determina los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.
c) Esboza la gráfica de f.

Solución:

a) Como $|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$, la función dada puede definirse así:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+2, & x<0\\ x^2-3x+2, & x\geq 0\end{cases}$$

Esta función está definida siempre y es continua para todo valor de x, incluido el 0, pues tanto por la izquierda como por la derecha de $x = 0$, $f(x)\to 2$.

Para ver la derivabilidad en $x = 0$ se estudian las derivadas laterales.

Por la izquierda:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+3h+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h+3)}{h}=3$$

Por la derecha:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-3h+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-3)}{h}=-3$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 0$.

b) Salvo en x = 0, la derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3, & x<0\\ 2x-3, & x>0\end{cases}$$

Esta derivada se anula en los puntos $x = -3/2$ y $x = 3/2$, por tanto se tiene:

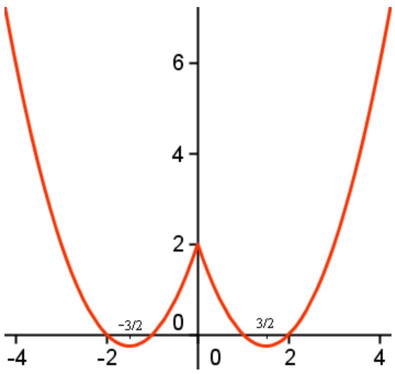
- si $x < -3/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- si $-3/2 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

La función tiene un mínimo en $x = -3/2$.

- si $0 < x < 3/2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. (La función tiene un máximo en $x = 0$)
- si $x > 3/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

La función tiene un mínimo en $x = 3/2$.

c) La gráfica de la función viene dada por dos trozos de parábolas, $f(x)=x^2+3x+2$ hasta $x = 0$ y $f(x)=x^2-3x+2$, desde $x = 0$. Se obtiene la siguiente figura.



26. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su gráfica.
Solución:
Derivadas primera y segunda:

$$f(x)=e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xe^{1-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{1-x^2}+4x^2e^{1-x^2}=(4x^2-2)e^{1-x^2}$$

Posibles extremos relativos: $f'(x)=-2xe^{1-x^2}=0 \Rightarrow x=0$

- Si $x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ es creciente.
- Si $x>0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x=0$ hay un máximo.

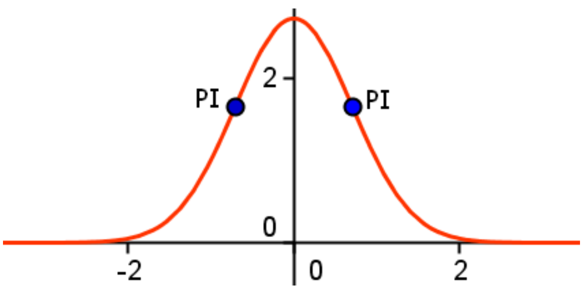
Posibles puntos de inflexión:

$$f''(x)=(4x^2-2)e^{1-x^2}=0 \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $f'''(x)=(12x-8x^3)e^{1-x^2}$ es distinto de 0 para esos dos valores, se confirma que ambos son puntos de inflexión.

Asíntotas:
Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1-x^2}=0 \Rightarrow$ la recta $y=0$ (el eje OX) es asíntota horizontal de la curva.
La curva va siempre por encima de la asíntota, pues $f(x)=e^{1-x^2}>0$, para todo x.

La gráfica de f es una "campana de Gauss" (tiene un máximo en $x=0$; es simétrica; tiende a 0 tanto hacia infinito como hacia menos infinito; tiene dos puntos de inflexión).
Su representación aproximada es:



27. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Haz una representación gráfica aproximada determinando sus asíntotas y sus extremos relativos.
Solución:
El dominio de esta función es $\mathbf{R}^+$.
Asíntotas:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\left[\frac{-\infty}{0}\right]=-\infty \Rightarrow \text{La recta } x=0 \text{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(\text{por L´Hôpital})=\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{2x}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0 \Rightarrow \text{La recta } y=0 \text{ es}$$

asíntota horizontal; la curva va por encima de ella.

Su derivada es:

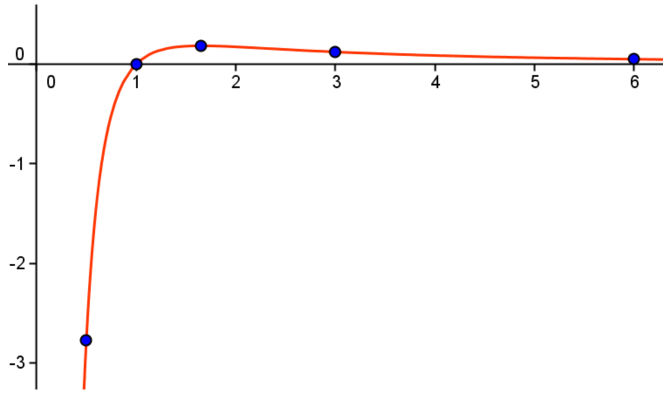
$$f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

La derivada se anula cuando $1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2}$

Como para $0 < x < e^{1/2}$ la derivada es positiva (la función crece) y para $x > e^{1/2}$ la derivada es negativa (y la función decrece), en $x = e^{1/n}$ se tendrá un máximo.

Algunos puntos de la cura son:

(0,5, –2,77); (1, 0); ($e^{1/2}$, $1/e$) ≈ (1,65, 0,18), máximo; (3, 0,12); (6, 0,05)



28. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 8]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y de los cortes con los ejes.

a) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ b) $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Solución:

a) La función $f(x) = \sin(nx)$ es periódica de periodo $\frac{n}{2\pi}$. Por tanto, las funciones dadas son periódicas de periodo $\frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ y $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$, respectivamente.

- $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ corta al eje OX cuando $\frac{\pi}{4}x = k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $k = 0$, $x = 0$; si $k = 1$, $x = 4$; si $k = 2$, $x = 8$.

Al eje OY lo corta en $y = 0$.

Los posibles máximos y mínimos de la función se presentan en los puntos que anulan la derivada primera.

- $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 6$

Como $f''(x) = -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ es negativa en $x = 2$ y positiva en $x = 6$, para el primer valor se obtiene un máximo; para el segundo, un mínimo.

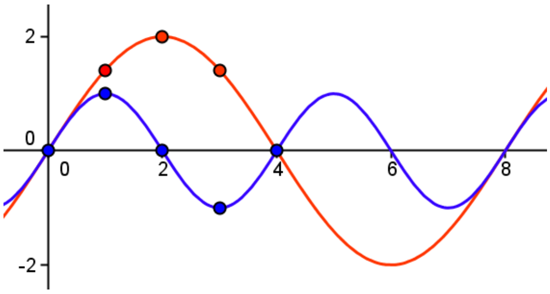
b) $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ corta al eje OX cuando $\frac{\pi}{2}x=k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $k = 0$, $x = 0$; si $k = 1$, $x = 2$; si $k = 2$, $x = 4$; si $k = 3$, $x = 6$; si $k = 4$, $x = 8$ (dos ciclos)..
Al eje OY lo corta en $y = 0$.

Máximos y mínimos:

- $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0 \Rightarrow x=1$, $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$.

Como $g''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es negativa en $x = 1$ y positiva en $x = 3$, para el primer valor se tiene un máximo; para el segundo, un mínimo.
(Para $x = 5$ y 7 se repite lo anterior).



Un esbozo de ambas gráficas es el siguiente.
Algunos puntos:
Para f: (0, 0); (1, $\sqrt{2}$); (2, 2) ; (3, $\sqrt{2}$); (4, 0).
Para g: (0, 0); (1, 1); (2, 0) ; (3, –1); (4, 0)

29. Representa gráficamente la función $f(x)=x-2\sin x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$.
Solución:
La función dada está definida en toda la recta real; y, por tanto en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
Además es impar: $f(-x)=-x-2\sin(-x)=-x+2\sin x=-f(x)$

Crecimiento y decrecimiento:

$f(x)=x-2\sin x \Rightarrow f'(x)=1-2\cos x$; $f''(x)=2\sin x$

$f'(x)=1-2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\pi/3$, $x = \pi/3$

Como $f''(-\pi/3)=2\sin(-\pi/3)=-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ en $x = -\pi/3$ se tiene un máximo.
Como $f''(\pi/3)=2\sin(\pi/3)=\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ en $x = \pi/3$ se tiene un mínimo.

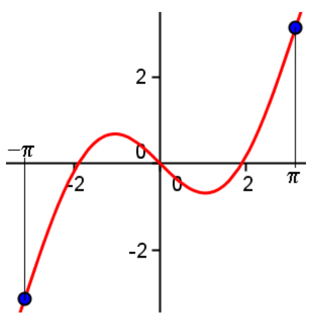
Por otra parte:
- si $-\pi < x < -\pi/3$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
- si $-\pi/3 < x < \pi/3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- si $\pi/3 < x < \pi$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

Algunos valores de la función son:

x	$-\pi$	$-5\pi/3$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0
$f(x)$	$-\pi$	$-5\pi/6 + 1$	$-\pi/2 + 2$	$-\pi/3+\sqrt{3}$	$-\pi/6 + 1$	0

Como la función es impar:

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/3$	π
$f(x)$	0	$\pi/6 - 1$	$\pi/3-\sqrt{3}$	$\pi/2 - 2$	$5\pi/6 - 1$	π



Su gráfica es la adjunta

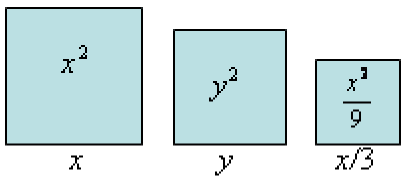
Problemas de optimización

30. La suma de dos números positivos es 36; encuentra aquellos cuya suma de cuadrados sea mínima.
Solución:
Sean x e y los números. Deben cumplir que $x+y=36$.
Se desea que $S=x^2+y^2$ sea mínima.
Sustituyendo $y=36-x$ en S se tiene:

$$S(x)=x^2+(36-x)^2 \Rightarrow S(x)=2x^2-72x+1296.$$

El mínimo de S se da en la solución de $S´=0$ que hace positiva a $S´´$.
Derivando: $S´(x)=4x-72=0 \Rightarrow x=18$.
Como $S´´=4>0$, para el valor $x=18$ se tiene la suma de cuadrados mínima.
Por tanto, ambos números deben ser iguales a 18.

31. (Propuesto en selectividad, Aragón 2007)
Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:
1) El perímetro del primero de ellos es el triple del perímetro del tercero.
2) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos.
3) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.
Solución:
Sean x, y, z la longitud de cada uno de los cuadrados.
Se sabe que $x=3z$. Por tanto, la situación es la que se muestra en la figura.



La suma de los perímetros será:

$$4x+4y+\frac{4}{3}x=1664 \Rightarrow y=416-\frac{4}{3}x$$

La suma de las superficies será: $S=x^2+y^2+\frac{x^2}{9}$

Sustituyendo $y=416-\frac{4}{3}x$, se tiene:

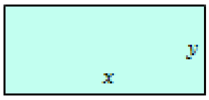
$$S(x)=x^2+\left(416-\frac{4}{3}x\right)^2+\frac{x^2}{9}=\frac{26}{9}x^2-\frac{3328}{3}x+173056$$

La suma de las áreas de los campos será mínima en las soluciones de $S´=0$ que hagan positiva a $S´´$.
Derivando:

$$S´(x)=\frac{52}{9}x-\frac{3328}{3}=\frac{52x-9984}{9} \Rightarrow S´(x)=0 \text{ cuando } x=192$$

Como $S´´(x)=\frac{52}{9}$, para ese valor de x se da el mínimo buscado. Por tanto, los lados de los campos serán 192 m, 160 m y 64 m:

32. (Propuesto en Selectividad)
Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.
Solución:
Sean x e y los lados del rectángulo.
Se desea que la suma $S = x + x + y = 2x + y$ sea mínima, con la condición de que $A = xy = 1$.



Despejando y sustituyendo: $y = \frac{1}{x} \to S(x) = 2x + \frac{1}{x}$

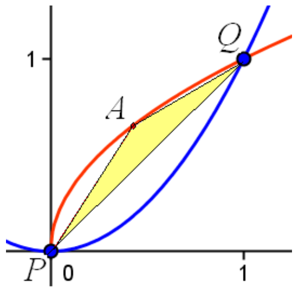
Para que S sea mínima: $S´ = 0$, $S´´ > 0$.

$$S´(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $S´´(x) = \frac{2}{x^3}$, cumple que $S´´\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, para ese valor se da el mínimo buscado.

Por tanto, las medidas de los lados serán: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$.

33. (Propuesto en Selectividad, Murcia 2000)
Las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos P y Q. Encuentra el punto A que está situado sobre la curva $y = \sqrt{x}$, entre P y Q, y que determina con P y Q un triángulo PAQ de área máxima.
Solución:



Los puntos P y Q son las soluciones del sistema: $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$
$\Rightarrow P = (0, 0)$, $Q = (1, 1)$.
Sea $A = (x, y)$ el punto buscado. Es obvio que $A = (x, \sqrt{x})$.
La superficie del triángulo PAQ es:

$$S = \frac{d(P,Q) \cdot d(A, \text{recta } PQ)}{2}$$

Se tiene:

$$d(P,Q) = \sqrt{2}; \quad \text{recta } PQ\text{: } y = x \Leftrightarrow x - y = 0; \quad d(A, \text{recta } PQ) = \left|\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right|.$$

En este caso, por ser $0 < x < 1$, $d(A, \text{recta } PQ) = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}$.

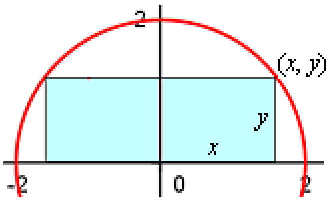
Luego, la superficie será: $S(x) = \frac{\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x}{2}$

Para que S sea máxima: $S´ = 0$, $S´´ < 0$.

$$S´(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}; \quad S´´(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}, \text{ que es negativa para } x = \frac{1}{4}$$

Por tanto, el punto $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

34. (Propuesto en Selectividad, Murcia 2000)
Determina las dimensiones de los lados y el área del rectángulo de área máxima que, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro, se puede inscribir en un semicírculo de 2 m de radio.
Solución:
La situación se muestra en la siguiente figura. Uno de los vértices sobre el círculo es (x, y). La base del rectángulo es 2x, su altura y.



Hay que hacer máxima la función $S = 2xy$.
La relación entre las variables es $x^2 + y^2 = 4$ (el punto (x, y) pertenece a una circunferencia de radio 2) $\Rightarrow$ $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Sustituyendo en S se tiene: $S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$

Para que S sea máxima: $S' = 0$; $S'' < 0$.

$$S'(x) = \frac{8x - 4x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \sqrt{2}$$

Si $0 < x < \sqrt{2}$, $S' > 0$, luego S es creciente.
Si $\sqrt{2} < x < 2$, $S' < 0$, luego S es decreciente.
Por tanto, en $x = \sqrt{2}$ se da el máximo de S.

Las dimensiones de los lados son: base = 2x = $2\sqrt{2}$; altura: $y = \sqrt{2}$.

El área será: $S = 4$ m^2.

35. (Propuesto en Selectividad, Aragón 2012)
Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.
Solución:
Sean x e y los números buscados.
Se desea que el producto $P = x \cdot y^2$ sea máximo.
Como se cumple que $x + y = 12 \Rightarrow x = 12 - y$.
Sustituyendo en P se tiene: $P = (12 - y) \cdot y^2$; que es una función en y:

$$P(y) = 12y^2 - y^3.$$

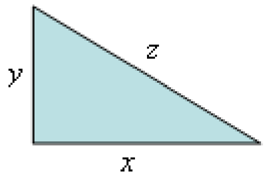
El máximo de P se obtiene en las soluciones de $P'(y) = 0$ que hagan negativa a $P''(y)$.
Derivando dos veces:

$$P'(y) = 24y - 3y^2; \quad P''(y) = 24 - 6y$$

La derivada primera se anula cuando $y = 0$ o $y = 8$.
Como $P''(0) = 24 > 0$ y $P''(8) = -24 < 0$, el valor máximo del producto se alcanza cuando $y = 8$.

Los números pedidos son $x = 4$ e $y = 8$.

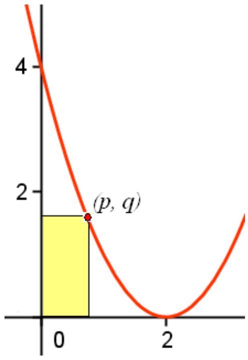
36. Determina las medidas de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 6 y cuya área sea máxima.
Solución:
Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro es: $x+y+z=6$.
Como $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x+y+\sqrt{x^2+y^2}=6$
Su área es $S=\dfrac{xy}{2}$
Operando en $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=6 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=6-x-y \Rightarrow 2xy-12x-12y+36=0 \Rightarrow y=\frac{6x-18}{x-6}$$
Sustituyendo en *S*: $S(x)=\dfrac{x\cdot\dfrac{6x-18}{x-6}}{2}=\dfrac{6x^2-18x}{2x-12}$

El máximo de *S* se obtiene en las soluciones de $S'=0$ que hacen negativa a S''.
$$S'(x)=\frac{12x^2-144x+216}{(2x-12)^2}=0 \Rightarrow x=\frac{12\pm6\sqrt{2}}{2}=6\pm3\sqrt{2}.$$
La solución $x=6+3\sqrt{2}>6$, por tanto hay que descartarla.
Como $S''(x)=\dfrac{864}{(2x-12)^3}<0$ para $x=6-3\sqrt{2}$, se da el máximo.
Para ese valor las dimensiones del triángulo son: $x=6-3\sqrt{2}$, $y=6-3\sqrt{2}$, $z=6\sqrt{2}-6$

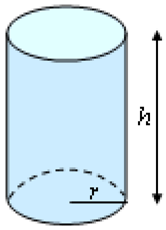
37. (Propuesto en Selectividad, Madrid 99)
Sea la parábola $y=x^2-4x+4$ y el punto (p, q) sobre ella con $0\le p\le 2$. Se forma un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos (0, 0) y (*p*, *q*). Calcula (*p*, *q*) para que el área de este rectángulo sea máxima.
Solución:
El punto (p, q) debe estar en una posición aproximada al dibujado en la figura adjunta, pues $0\le p\le 2$.



El área del rectángulo será: $A=pq$
Como (*p*, *q*) es de la parábola, cumple: $q=p^2-4p+4$.
Luego,
$$A=p^3-4p^2+4p$$
Para máximo: $A'=0$ y $A''<0$.
$A'=3p^2-8p+4=0 \Rightarrow p=2$ o $p=2/3$
$A''=6p-8 \to A''(2)=4; A''(2/3)=-4$.

El área máxima se da cuando $p=2/3$, siendo $q=16/9$.

38. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.
Solución:
Sea r el radio del cilindro y h su altura.
Su área es:



$$A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 54 \Rightarrow h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

La función de volumen es:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow V = 27r - 3\pi r^3$$

Para que V sea máximo: $V' = 0$ y $V'' < 0$.

$$V' = 27 - 9\pi r^2 \Rightarrow (\text{para } V' = 0) \rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Como $V'' = -18\pi r$ es negativo para cualquier valor de r, el resultado hallado es el que proporciona el volumen máximo.

39. El coste de fabricación de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 0,02x^2 + 4x + 80$. Todas las unidades producidas se venden a un precio dado por $p(x) = 200 - x$ ($C(x)$ y $p(x)$ en unidades monetarias, u.m.). Calcula el nivel de producción que:
a) Minimiza el coste medio por unidad. ¿Cuál es ese coste?
b) Maximiza los beneficios. ¿A cuánto asciende ese beneficio?
Solución:
a) El coste por unidad se halla dividiendo el coste total, $C(x)$, entre las unidades producidas, x:

$$M(x) = 0,02x + 4 + \frac{80}{x}$$

Para que $M(x)$ sea mínimo, su derivada debe ser 0: $M'(x) = 0,02 - \frac{80}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{4000}$

Como $M''(x) = \frac{160}{x^3} > 0$, el mínimo se da en ese punto: $x = \sqrt{4000} \approx 63,2$.

El precio unitario mínimo será $M\left(\sqrt{4000}\right) \approx 6,53$ u.m.

b) El objetivo es maximizar los beneficios obtenidos por la fabricación y venta de x unidades de producto.
Estos beneficios, $B(x)$, se hallan restando los costes a los ingresos:
$B(x)$ = Ingresos totales – Costes totales.

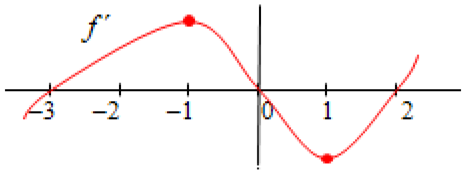
Los ingresos, $I(x)$, se calculan multiplicando el número de unidades vendidas por el precio por unidad.
Por tanto, $I(x) = x \cdot p(x) = x(200 - x) = 200x - x^2$
De donde,

$$B(x) = I(x) - C(x) = \left(200x - x^2\right) - \left(0,02x^2 + 4x + 80\right) \Rightarrow B(x) = -1,02x^2 + 196x - 80$$

Para que $B(x)$ sea máximo, $B'(x) = 0$: $B'(x) = -2,04x + 196 = 0 \Rightarrow x = 96,08$.
Como $B''(x) = -2,04 < 0$, el punto hallado da el máximo beneficio, que asciende a $B(96,08)$ = 9336 u.m.

Otros problemas

40. (Propuesto en Selectividad, Madrid)
Sea *f*: **R** → **R** una función derivable en todo **R**. Se sabe que *f*(0) = 3; *f*(–3) = 0 y *f*(2) = 0. Además, la gráfica de su derivada es:

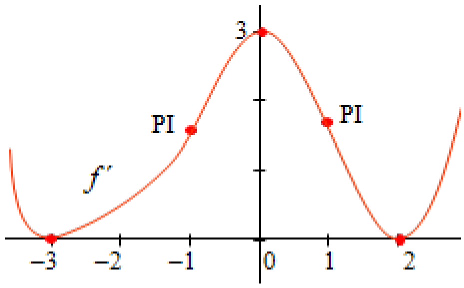


Dibuja la gráfica de $f(x)$.
Solución:
Los máximos y mínimos se dan en los puntos cuya derivada vale 0 (condición necesaria). Esos puntos son $x = –3$, $x = 0$ y $x = 2$.
Por otra parte, cuando la derivada es positiva la función es creciente; y cuando es negativa, decreciente. Por consiguiente, la función es creciente en el intervalo (–3, 0) ∪ (2 + ∞); es decreciente en (–∞, –3) ∪ (0, 2).

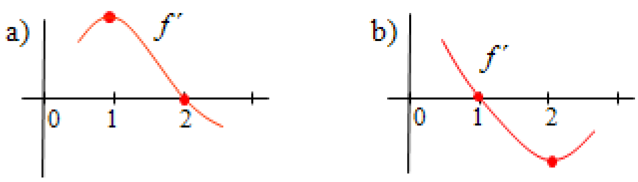
- Como a la izquierda de $x = –3$ la función es decreciente y a su derecha es creciente, en $x = –3$ debe darse un mínimo.
- Como a la izquierda de $x = 0$ la función es creciente y a su derecha es decreciente, en $x = 0$ debe darse un máximo.
- Como a la izquierda de $x = 2$ la función es decreciente y a su derecha creciente, en $x = 2$ se da otro mínimo.

En $x = –1$ y en $x = 1$ la función tiene sendos puntos de inflexión, pues la recta tangente a $f´(x)$ es horizontal, y por tanto $f´´(x) = 0$.

Con estos datos y los valores dados en el enunciado puede trazarse la gráfica de $f(x)$, que es la adjunta.



41. Sea *f* una función de la que se sabe que la gráfica de su derivada *f* ´ tiene la forma que aparece en la figura:



Determina, en cada caso, si $f(x)$ tiene máximos, mínimos (relativos) o puntos de inflexión en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$.
Solución:
a) En $x = 1$ la función derivada tiene un máximo; por tanto su derivada será 0: $f´´(x) = 0$. En consecuencia, en $x = 1$ se da un punto de inflexión.
En $x = 2$ la función derivada vale 0; a su izquierda la función es creciente ($f´(x) > 0$) y a su derecha decreciente ($f´(x) < 0$); por tanto, en $x = 2$ debe darse un máximo.

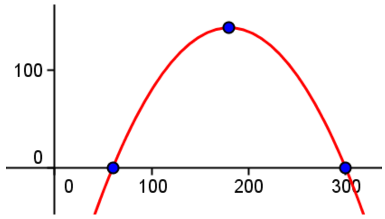
b) En $x = 1$ la función derivada vale 0. Además es positiva a su izquierda y negativa a su derecha. Por tanto, en ese punto se tiene un máximo.

En $x = 2$ la función derivada tiene un mínimo; por tanto su derivada será 0: $f''(x) = 0$. En consecuencia, en $x = 2$ se da un punto de inflexión.

42. (Propuesto en Selectividad, País Vasco)
El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0{,}01x^2 + 3{,}6x - 180$
a) Determina los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
b) Determina los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.
Solución:
a) El beneficio es máximo cuando $B'(x) = 0$ $\to$ en el vértice de la parábola.
Derivando:

$$B'(x) = -0{,}02x + 3{,}6 = 0 \Rightarrow x = 180.$$

Como $B''(x) = -0{,}02 < 0$, para ese valor se tiene el máximo buscado.
Hay que producir 180 kg; el beneficio será de $B(180) = 144$ u.m.



b) La empresa no tiene perdidas si $B(x) = -0{,}01x^2 + 3{,}6x - 180 \geq 0$. Se trata de una inecuación cuya solución es $x \in [60,\ 300]$. Por tanto, como máximo podrá producir 300 kilos.

43. Demuestra que la función $f(x) = e^x + 2x$ corta una sola vez al eje OX.
Solución:
$f(x) = e^x + 2x \Rightarrow f'(x) = e^x + 2 > 0$, luego la función es siempre creciente.
Como $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$ y $f(0) = 1$, la función corta al eje OX (por Bolzano); pero como es siempre creciente no puede volver a cortar. Luego, corta una sola vez.

44. Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una sola raíz real.
Solución:
Se define la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 = 0$, que es continua y derivable en todo **R**.

Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, por el teorema de Bolzano se deduce que la función corta al eje OX en el intervalo (0, 1). Luego la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1.

Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ para todo x, la función será siempre creciente. En consecuencia, sólo corta una vez al eje OX. Luego la ecuación $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ sólo tiene una raíz real.

45. Determina si la función $f(x) = \dfrac{m}{1 + x^2}$ tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión. ¿Depende del valor que tome m?
Solución:

$$f(x) = \frac{m}{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2mx}{(1 + x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2m(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}$$

- La derivada primera se anula si $x = 0$, independientemente del valor de m.

Si $m > 0$, $f''(0) < 0 \to$ se tendría un máximo.
Si $m < 0$, $f''(0) > 0 \to$ se tendría un mínimo.

- Si $m \neq 0$, la derivada segunda se anula en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos

puntos de inflexión, pues la derivada tercera es distinta de cero en ambos puntos:

$$f'''(x) = \frac{24mx(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

- Si $m = 0$, la función es $f(x) = 0$, que representa el eje OX.

46. Dada la función $f(x) = \frac{3x-1}{x-a}$:

a) ¿Hay algún valor de a para el que se pueda evitar la discontinuidad en $x = a$?
b) ¿Hay algún valor de a para el que la función tenga un máximo?
Solución:
a) La función no está definida en $x = a$, luego no es continua en ese punto.

Es evidente que $\lim_{x \to a} \frac{3x-1}{x-a} = \infty$, salvo que el numerador y el denominador se anulen a la vez en el mismo punto.

Esto es, cuando $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$.

En ese caso, si $a = 1/3$, el límite es: $\lim_{x \to 1/3} \frac{3x-1}{x-1/3} = \lim_{x \to 1/3} \frac{3(x-1/3)}{x-1/3} = 3$.

Por tanto, la discontinuidad puede evitarse cuando $a = 1/3$.

b) La derivada es: $f'(x) = \frac{3(x-a)-3x+1}{(x-a)^2} = \frac{1-3a}{(x-a)^2}$.

Para que la función tenga un máximo la derivada debe anularse $\Rightarrow a = 1/3$. Como depende de a, y la función no está definida en a, no es posible que la función tenga un máximo.

47. Dada la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, se pide:

a) Sus máximos y mínimos relativos, si los tiene.
b) Demuestra que corta dos veces al eje OX en el intervalo $[-1, 2]$.
Solución:

a) $f(x) = 2 + 2x - e^x \Rightarrow f'(x) = 2 - e^x \Rightarrow f''(x) = -e^x$

La derivada primera se anula si $x = \ln 2$.

Como $f''(\ln 2) = -2 < 0$, la función tendrá un máximo en $x = \ln 2 \approx 0,69$. Su valor será $f(\ln 2) = 2 + 2\ln 2 - e^{\ln 2} = 2 + 2\ln 2 - 2 = 2\ln 2$.

b) Aplicando Bolzano:

$f(-1) = -e^{-1} < 0$; $f(\ln 2) = 2\ln 2 > 0$ $\Rightarrow$ En el intervalo $(-1, \ln 2)$ tiene una raíz.

$f(\ln 2) = 2\ln 2 > 0$; $f(2) = 2 + 4 - e^2 < 0$ $\Rightarrow$ En el intervalo $(\ln 2, 2)$ tiene otra raíz.