

TEMA 6. Ángulos, distancias, simetrías... Problemas Resueltos

Ángulos entre rectas y planos

1. Dadas las rectas r y s de ecuaciones: $r \equiv x - 1 = y = 1 - z$; $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

- Comprueba que se cortan y halla su punto de corte.
- Determina el ángulo que forman r y s .
- Halla la ecuación del plano que contiene a r y s .

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas r y s son:

$$r \equiv x - 1 = y = 1 - z = t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2h \\ y = h \\ z = 1 - h \end{cases}$$

Igualando las componentes de ambas rectas:

$$\begin{cases} 1 + t = -1 + 2h \\ t = h \\ 1 - t = 1 - h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = -1 + 2h \\ t = h \end{cases} \Rightarrow t = h = 2.$$

Las rectas se cortan en el punto $P(3, 2, -1)$.

b) Ángulo $(r, s) = \text{ángulo}(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$.

Aplicando el producto escalar:

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{2 + 1 + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Luego, ángulo $(r, s) = \arccos\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right) = 19,47^\circ$.

c) El plano queda determinado por el punto $P(3, 2, -1)$ y por los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s .

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & 1 & 2 \\ y - 2 & 1 & 1 \\ z + 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv -(y - 2) - (z + 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + z - 1 = 0.$$

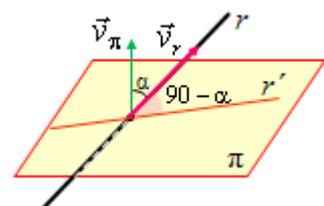
2. (Propuesto en Selectividad en 2012, Murcia)

Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π , siendo:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \text{ y } \pi: x - 2y - z = 4$$

Solución:

El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores \vec{v}_r , de dirección de la recta, con \vec{v}_π , normal al plano. (En la figura, r' es la proyección de r sobre π .)



Esto es, ángulo $(r, \pi) = 90^\circ - \text{ángulo}(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r)$.

En consecuencia, $\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$.

Como $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$; $\vec{v}_\pi = (1, -2, -1) \Rightarrow \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{2+2-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60$. Por tanto, el ángulo que forman la recta y el plano es 30° .

3. Halla el ángulo que forma el plano $\pi: x + y + z = 0$ con la recta de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

El seno del ángulo (r, π) , $\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$, siendo \vec{v}_r el vector de dirección de la recta y \vec{v}_π el vector normal al plano.

El plano $\pi: x + y + z = 0$ tiene como vector normal $\vec{v}_\pi = (1, 1, 1)$.

La recta $r: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, -1)$.

Luego: $\text{sen}(r, \pi) = \left| \frac{(-1, 1, -1) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ángulo}(r, \pi) = \arcsen(1/3) = 19,47^\circ$

4. Halla el ángulo que forma la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv \sqrt{3}x - z = 3$.

Solución:

Su valor es el complementario del ángulo formado por el vector de dirección de la recta y el vector característico del plano.

Por tanto, el seno del ángulo (r, π) ,

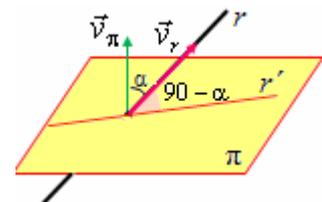
$$\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$$

Para obtener \vec{v}_r se expresa la recta en sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Se tiene: $\vec{v}_r = (0, 0, 1)$; $\vec{v}_\pi = (\sqrt{3}, 0, -1)$.

Luego: $\text{sen}(r, \pi) = \frac{(0, 0, 1) \cdot (\sqrt{3}, 0, -1)}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{ángulo}(r, \pi) = 150^\circ \rightarrow$ Se toma 30° , el más pequeño.



5. Determina el ángulo que forman los planos:

$$\pi_1 : 3x - y + 2z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 2x + y - 5z - 1 = 0$$

Solución:

El ángulo (π_1, π_2) es el mismo que el que forman sus vectores característicos.

Como $\vec{v}_{\pi_1} = (3, -1, 2)$ y $\vec{v}_{\pi_2} = (2, 1, -5)$, se tiene que

$$\cos(\vec{v}_{\pi_1}, \vec{v}_{\pi_2}) = \frac{\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{6 - 1 - 10}{\sqrt{14} \sqrt{30}} = \frac{-5}{2\sqrt{105}}$$

Por tanto, el ángulo $(\pi_1, \pi_2) = \arccos\left(\frac{-5}{2\sqrt{105}}\right) \approx 75,88^\circ$

6. Halla el ángulo que forman los planos $\pi_1 : 2x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x + y + 2z - 1 = 0$

Solución:

Los vectores característicos son: $\vec{v}_{\pi_1} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_{\pi_2} = (1, 1, 2)$.

El coseno del ángulo que forman es

$$\cos(\vec{v}_{\pi_1}, \vec{v}_{\pi_2}) = \frac{\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ángulo} = 60^\circ.$$

Paralelismo y perpendicularidad

7. Sea el punto $P = (1, 2, 3)$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$.

a) Halla la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta r .

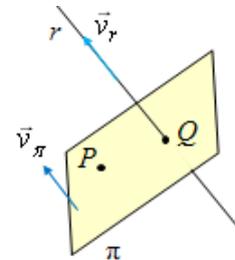
b) Halla el punto de corte entre la recta r y el plano π .

Solución:

a) El plano π viene determinado por el punto dado, P , y por el vector de dirección de la recta, pues el vector característico (normal) del plano es igual al de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

Como $P = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$, su ecuación es:

$$\pi \equiv 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 2) - 1 \cdot (z - 3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0.$$



b) El punto Q , de corte de la recta con el plano hallado, se obtiene resolviendo el sistema recta-plano. Para ello conviene obtener las ecuaciones de la recta en forma paramétrica y sustituirlas en la ecuación del plano:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 2(1 + 2t) + 3(-2 + 3t) - (5 - t) - 5 = 0 \Rightarrow 14t - 14 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Por tanto, $Q = (3, 1, 4)$.

8. (Propuesto en Selectividad en 2011, Asturias)

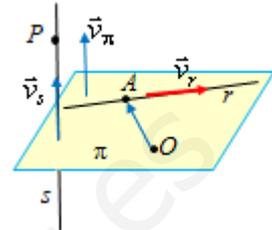
Se considera la recta $r : \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

- a) Determina el plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $(1, 0, 1)$.

Solución:

a) Si se expresa la recta en su forma paramétrica se tiene:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$



El plano pedido viene determinado por el punto O y por los vectores $OA = (0, -5, 2)$ y el de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$.

Su ecuación será: $\pi : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 5h \\ z = -t + 2h \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & -5 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x + 2y + 5z = 0$.

b) El vector de dirección de la recta perpendicular a π será $\vec{v}_\pi = (1, 2, 5)$; como debe pasar por el punto $P(1, 0, 1)$ su ecuación es:

$$s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

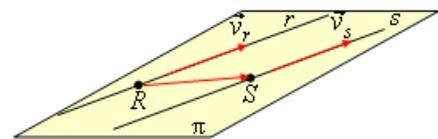
9. Sea $\alpha \neq 0$ un número real, y las rectas de ecuaciones: $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{\alpha}$; $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$.

Determina el valor de α para el que r y s son paralelas. En ese caso, halla la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección: sus vectores de dirección deben ser proporcionales. Esto es: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_s$.

En este caso: $\vec{v}_r = (2, 1, \alpha)$ y $\vec{v}_s = (4, 2, -2)$.



Para que $(2, 1, \alpha) = k \cdot (4, 2, -2)$, $k = \frac{1}{2}$; luego $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$.

El plano que contiene a ambas rectas queda determinado por un punto $R \in r$, y los vectores RS y \vec{v}_s , siendo $S \in s$.

Tomando $R = (0, 0, 0)$ y $S = (1, 0, 3)$ se tiene que $RS = (1, 0, 3)$; y el plano buscado será:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 3\mu - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y & 0 & 2 \\ z-3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 7y - z = 0$$

10. Dadas las rectas de ecuaciones: $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$; $r': \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + bz = 0 \end{cases}$

- a) ¿Qué relación debe existir entre a y b para que r y r' sean paralelas?
 b) ¿Y para que sean perpendiculares?

Solución:

Ambas cuestiones se resuelven comparando los vectores de dirección de las rectas, que pueden obtenerse multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos que las definen.

En este caso:

$$\vec{v}_r = (1, 1, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2).$$

$$\vec{v}_{r'} = (1, 1, 1) \times (a, 0, b) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = (b, a - b, -a).$$

a) Las rectas serán paralelas cuando sus vectores de dirección lo sean; esto implica que

$$\vec{v}_r = k\vec{v}_{r'}.$$

$$\text{Luego: } (2, 0, -2) = k \cdot (b, a - b, -a) \Rightarrow \begin{cases} 2 = kb \\ 0 = a - b \Rightarrow a = b, \text{ y ambos distintos de } 0. \\ 2 = ka \end{cases}$$

b) Las rectas serán perpendiculares cuando sus vectores de dirección lo sean.

Por tanto,

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{r'} = 0 \Rightarrow (2, 0, -2) \cdot (b, a - b, -a) = 0 \Rightarrow 2b + 2a = 0 \Rightarrow a = -b.$$

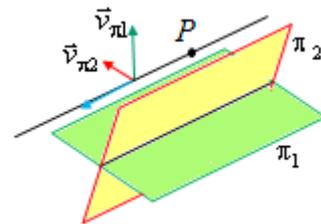
11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 3, -2)$ y que sea paralela a los planos: $\pi_1: 2x - y + z + 1 = 0$ y $\pi_2: -x + 3y - z + 1 = 0$

Solución:

El vector de dirección de la recta buscada será $\vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2}$:

$$\vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 5).$$

$$\text{Su ecuación es: } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}.$$



12. Halla la ecuación del un plano perpendicular a los planos π_1 y π_2 , del problema anterior, que pase por el punto $Q(2, 0, -1)$.

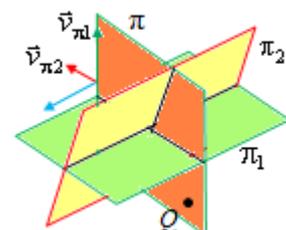
Solución:

El vector normal del plano pedido es $\vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2} = (-2, 1, 5)$.

Por tanto, su ecuación es: $\pi: -2x + y + 5z + d = 0$.

Por contener al punto Q : $-4 - 5 + d = 0 \Rightarrow d = 9$.

El plano es: $\pi: -2x + y + 5z + 9 = 0$.



13. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}, \quad s \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}.$$

- Comprueba que se cortan perpendicularmente.
- Halla la ecuación del plano que las contiene.
- Halla la recta perpendicular común a r y s .

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7 - 2y \\ y = y \\ z = 2 - y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, 2, -1).$$

$$s \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3h \\ z = -1 + 2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3, 2).$$

Los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s son perpendiculares, ya que

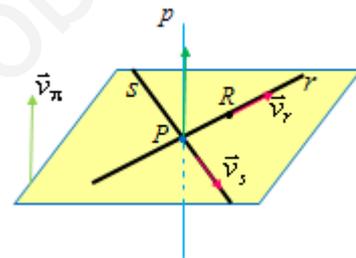
$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-4, 2, -1) \cdot (1, 3, 2) = -4 + 6 - 2 = 0.$$

Por tanto, las rectas son perpendiculares.

Para comprobar que se cortan basta con ver que el sistema que determinan tiene solución. Este sistema es:

$$\begin{cases} 7 - 4t = 1 + h \\ 2t = 3h \\ 2 - t = -1 + 2h \end{cases}, \text{ cuya solución es } t = \frac{9}{7} \text{ y } h = \frac{6}{7}.$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo $t = \frac{9}{7}$ en r o $h = \frac{6}{7}$ en $s \rightarrow P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$.



b) El plano pedido queda determinado, por ejemplo, por $R(7, 0, 2) \in r$ y por los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s . Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-7 & -4 & 1 \\ y & 2 & 3 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 7(x-7) + 7y - 14(z-2) = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 2z - 3 = 0.$$

c) La perpendicular común es la que pasa por P y lleva la dirección del vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, 1, -2)$.

Su ecuación es: $p \equiv \begin{cases} x = 13/7 + \lambda \\ y = 18/7 + \lambda \\ z = 5/7 - 2\lambda \end{cases}$

14. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
- b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s .

Solución:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$$\vec{v}_r = (1, 1, -1), \quad \vec{v}_s = (1, 2, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{RS} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

donde R es un punto de r y S un punto de s .

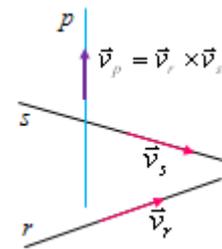
Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las

rectas r y s se cruzan.

b) La dirección de todas las rectas perpendiculares a las dadas es la del vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$

Una de las infinitas rectas perpendiculares es: $p \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.



Observación: Del enunciado no se deduce que se pida la recta perpendicular común.

15. Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas, $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

- a) Estudia la posición relativa de r y s .
- b) Determina la recta que corta perpendicularmente a r y s .
- c) Halla la distancia ente r y s .

Solución:

a) Como el sistema $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \cap s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$, formado por las dos rectas, es incompatible

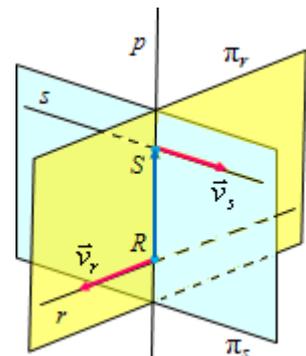
(pues no puede ser a la vez $z = 0$ y $z = 2$), las rectas se cruzan.

b) La perpendicular común es la intersección de los planos π_r y π_s .

El plano π_r viene determinado por la recta r , a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

El plano π_s viene determinado por la recta s , a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

Como $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$, dichos planos son:



$$\pi_r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_r: y = 1;$$

$$\pi_s : \begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = 2 + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_s: x = 0.$$

Por tanto, la perpendicular común es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

De otra forma:

Se toman dos puntos genéricos, R y S , y se impone la condición de que el vector \mathbf{RS} sea perpendicular a los vectores de dirección de ambas rectas, $\vec{v}_r = (1, 0, 0)$ y $\vec{v}_s = (0, 1, 0)$

Puntos genéricos de r y s son, respectivamente, $R(t, 1, 0)$ y $S(0, h, 2) \Rightarrow \mathbf{RS} = (-t, h - 1, 2)$

Como \mathbf{RS} debe ser perpendicular debe cumplirse, a la vez, que $\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$ y $\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$.

Esto es:

$$\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-t, h - 1, 2) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow -t = 0 \rightarrow t = 0.$$

$$\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (-t, h - 1, 2) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow h - 1 = 0 \rightarrow h = 1.$$

Luego: $R(0, 1, 0)$; $S(0, 1, 2)$; $\mathbf{RS} = (0, 0, 2) \equiv (0, 0, 1)$. Por tanto, la recta $R-S$ es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

c) Como se conocen los puntos R y S , la distancia entre las rectas es la misma que la distancia entre los puntos R y S . Esto es,

$$d(r, s) = d(R, S) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

Nota: Utilizando la fórmula $d(r, s) = \frac{|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{SR} \right]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$, siendo \overrightarrow{SR} un vector que va de r a s : $R \in r$

y $S \in s$. (Aquí, R y S son puntos arbitrarios de r y s , respectivamente.)

16. Sean las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$.

a) Comprueba que se cruzan en el espacio.

b) Halla un punto de r y otro de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas. Halla la recta perpendicular común a r y a s .

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \text{Restando } E2 - E1: y = 3 - z \Rightarrow x = 1 + 2z.$$

Haciendo $z = t$ se tiene: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow$ Un punto $A \in r$ es $A(1, 3, 0)$; y $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$.

En la recta s haciendo $z = h \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = h \end{cases} \rightarrow$ Un punto $B \in s$ es $B(2, -5, 0)$; $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$.

Como los vectores $\mathbf{AB} = (1, -8, 0)$, \vec{v}_r y \vec{v}_s son linealmente independientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 16 \neq 0, \text{ se concluye que las rectas se cruzan.}$$

b) Sean R y S puntos genéricos de r y s , respectivamente:

$$R = (1 + 2t, 3 - t, t); S = (2, -5, h)$$

El vector $\mathbf{RS} = (1 - 2t, -8 + t, h - t)$ debe ser perpendicular a los vectores de dirección de ambas rectas, $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$.

En consecuencia:

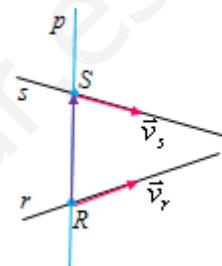
$$\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow h - 6t - 10 = 0.$$

$$\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow h - t = 0.$$

Resolviendo el sistema se tiene: $t = h = 2$.

Los puntos R y S son: $R(5, 1, 2)$; $S(2, -5, 2) \Rightarrow \mathbf{RS} = (-3, -6, 0)$.

La recta, perpendicular común a r y s es: $p \equiv \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = 1 - 6\lambda \\ z = 2 \end{cases}$



Observación:

Puede comprobarse que el vector $\mathbf{RS} = (-3, -6, 0)$ es perpendicular a \vec{v}_r y a \vec{v}_s .

17. Halla las ecuaciones de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas, siendo:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}, \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Solución:

Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

$$P = (t, 1 - 2t, 3 + 2t), \quad Q = (2 + 3h, h, -1 - h)$$

De donde: $\overrightarrow{PQ} = (2 + 3h - t, -1 + h + 2t, -4 - h - 2t)$. Este vector debe ser perpendicular a los de dirección de r y s .

Multiplicando escalarmente ($\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0$), se tiene:

$$\begin{cases} h + 9t = -4 \\ 11h + t = -9 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{-5}{14} \text{ y } h = -\frac{11}{14}.$$

Con esto:

$$P\left(\frac{-5}{14}, \frac{24}{14}, \frac{32}{14}\right) \text{ y } \overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{-5}{2}, \frac{-5}{2}\right) \equiv (0, 1, 1)$$

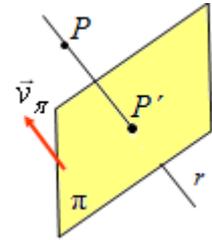
La recta perpendicular común es: $\begin{cases} x = -5/14 \\ y = 24/14 + p \\ z = 32/14 + p \end{cases}$

Proyecciones en el espacio

18. Halla la proyección de $P(1, -1, 0)$ sobre el plano $\pi: 3x + y - 2z + 7 = 0$:

Solución:

- 1) Se halla la recta perpendicular a π que contiene a $P \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$
 - 2) Se halla el corte entre r y $\pi \rightarrow \pi: 3(1 + 3t) + (-1 + t) - 2(-2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = -9/14$.
- Por tanto, el punto $P' = (-13/14, -23/14, 18/14)$.



19. Halla la proyección ortogonal de de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\pi \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$.

Obtén la solución de las dos formas posibles:

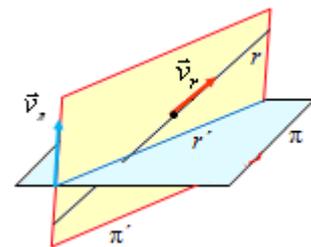
- 1) Mediante el corte de dos planos; 2) Proyectando dos puntos de r sobre el plano.

Solución:

- 1) La recta proyectada, r' , es la intersección del plano π con el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . Queda definido por el punto $(1, 1, 2) \in r$ y los vectores $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$ y $\vec{v}_\pi = (1, -3, 2)$.

Su ecuación es:

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2h + t \\ y = 1 + h - 3t \\ z = 2 + 2h + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-1 & 1 & -3 \\ z-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \pi' \equiv 8x - 2y - 7z + 8 = 0.$$



Luego, la recta r' es:

$$r' \equiv \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{haciendo } z = 22\lambda) \quad r' \equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4 + 23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}$$

- 2) Proyectando los puntos $A(1, 1, 2)$ y $B(-1, 0, 0)$ de r sobre el plano π .

Las rectas p_A y p_B , perpendiculares al plano son: $p_A \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ y $p_B \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Cortan al plano en:

$$A' \rightarrow (1+t) - 3(1-3t) + 2(2+2t) + 12 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A'(0, 4, 0)$$

$$B' \rightarrow (-1+t) - 3(-3t) + 2(2t) + 12 = 0 \Rightarrow t = -11/14 \Rightarrow B'(-25/14, 33/14, -22/14)$$

Como $A'B' = (-25/14, -23/14, -22/14) = (25, 23, 22) \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4 + 23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}$

20. Halla la proyección del punto $P(2, -1, 1)$ sobre la recta $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$.

Solución:

La proyección de P sobre la recta r se obtiene hallando el corte de dicha recta con el plano π , perpendicular a ella que pasa por P .

Como $\vec{v}_r = (3, 1, 2)$, el plano π será:

$$3(x-2) + (y+1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: 3x + y + 2z - 7 = 0.$$

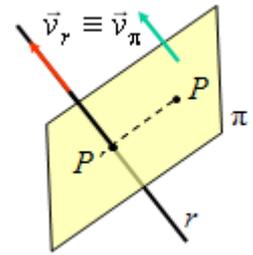
Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r : $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t, \end{cases}$ en la ecuación

$$\begin{cases} z = 2t \end{cases}$$

del plano se obtiene P' :

$$3(3+3t) + (-1+t) + 2(2t) - 7 = 0 \Rightarrow 14t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{14}.$$

Por tanto, P' : $\begin{cases} x = 3 + 3(-1/14) = 39/14 \\ y = -1 - 1/14 = -15/14 \\ z = -2/14 \end{cases} \Rightarrow P' = \left(\frac{39}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{2}{14}\right).$



Simetrías

21. Halla las coordenadas del punto P' simétrico de $P(2, 0, -1)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

Solución:

Si P' es el simétrico de P respecto la recta, se cumplen dos cosas:

- 1) El punto medio del segmento PP' , R , debe ser de la recta.
- 2) El vector \overrightarrow{PR} debe ser perpendicular al vector \vec{v}_r de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PR} = 0$.

Un punto genérico de la recta es: $R = (-1 - 2t, 2 + t, -1 + 3t)$.

Por tanto:

$$\overrightarrow{PR} = (-1 - 2t, 2 + t, -1 + 3t) - (2, 0, -1) = (-3 - 2t, 2 + t, 3t)$$

$$\text{Condición 2): } \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (-2, 1, 3) \cdot (-3 - 2t, 2 + t, 3t) = 6 + 4t + 2 + t + 9t = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 14t = -8 \Rightarrow t = -4/7$$

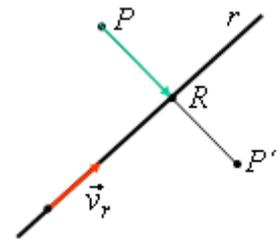
Luego, $R = (1/7, 10/7, -19/9)$

Condición 1): Si $P' = (a, b, c)$, el punto medio entre P y P' es: $R = \left(\frac{a+2}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$

Como $R = (1/7, 10/7, -19/9)$, se cumple que:

$$\frac{a+2}{2} = \frac{1}{7} \Rightarrow a = -\frac{12}{7}; \quad \frac{b}{2} = \frac{10}{7} \Rightarrow b = \frac{20}{7}; \quad \frac{c-1}{2} = -\frac{19}{9} \Rightarrow c = -\frac{31}{7}.$$

Luego, $P' = \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right).$



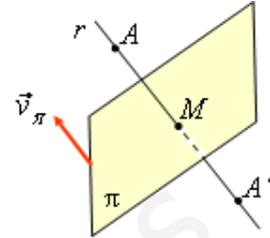
22. (Propuesto en Selectividad en 2011, Islas Baleares)

Dados el punto $A = (1, 3, 0)$ y el plano $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$, determina las coordenadas del punto A' , simétrico del punto A respecto del plano π . Calcula la distancia de A' al plano π .

Solución:

Sea A' el simétrico de A respecto de π . Ambos puntos, A y A' , estarán en la recta r , perpendicular a π por A .

Como $v_\pi = (1, 2, 1)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.



Puede tomarse A' como un punto genérico de r :

$$A' = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, \lambda)$$

La distancia de ambos puntos al plano debe ser la misma: $d(A, \pi) = d(A', \pi)$.

La distancia de A a π es:

$$d(A, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

La distancia de A' a π es:

$$d(A', \pi) = \frac{|(1 + \lambda) + 2 \cdot (3 + 2\lambda) + \lambda - 1|}{\sqrt{6}} = \left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right|.$$

Como ambas distancias deben ser iguales,

$$\left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6} \Rightarrow |6\lambda + 6| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda + 6 = 6 \Rightarrow \lambda = 0 \\ -6\lambda - 6 = 6 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}.$$

Para $\lambda = 0$, $A' = (1, 3, 0)$, que hay que descartar por tratarse del punto A dado.

Para $\lambda = -2$, $A' = (-1, -1, -2)$, que es el punto buscado.

De otra forma:

Sea $A = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de π .

Ambos puntos, A y A' estarán en la recta r , perpendicular a π por A . Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre A y A' .

Como $v_\pi = (1, 2, 1)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con el plano $\rightarrow \pi: (1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Por tanto, $M = (0, 1, -1)$.

Punto medio de A y A' : $\left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right)$.

Como $M = (0, 1, -1) = \left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right) \Rightarrow$

$$0 = \frac{1 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1; 1 = \frac{3 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -1; -1 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -2$$

Por tanto, $A' = (-1, -1, -2)$.

Distancias

23. Halla la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos:

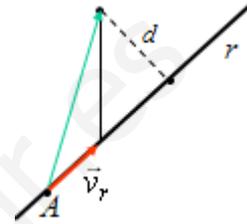
a) $P(2, 0, -1)$; $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$.

b) $P(1, -1, 3)$; $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ c) $P(16, 0, 0)$; $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$,

Solución:

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}, \text{ siendo } A \in r.$$



a) En este caso:

$$A = (-1, 2, -1), P = (2, 0, -1), \overrightarrow{AP} = (3, -2, 0), \vec{v}_r = (-2, 1, 3)$$

Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -9, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2 + (-1)^2} = \sqrt{118}$$

Módulo de \vec{v}_r : $|\vec{v}_r| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Por tanto, $d(P, r) = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}}$.

b) En este caso: $A = (1, 1, 1), P = (1, -1, 3), \overrightarrow{AP} = (0, -2, 2), \vec{v}_r = (1, -1, 2)$

El producto vectorial $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r$ vale,

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2) \Rightarrow d(P, r) = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{2}$$

c) Para obtener \vec{v}_r puede expresarse la recta en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7 - 2y \\ y = y \\ z = 2 - y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{v}_r = (-4, 2, -1)$; $A = (7, 0, 2), P = (16, 0, 0) \rightarrow \overrightarrow{AP} = (9, 0, -2)$,

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 9 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4, 17, 18) \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{4^2 + 17^2 + 18^2} = \sqrt{629}$$

El módulo de \vec{v}_r : $|\vec{v}_r| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21} \Rightarrow d(P, r) = \frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}$.

24. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

Solución:

Sea $X \in r$ el punto pedido: $X = (\lambda, 3 - \lambda, 1 + 2\lambda)$. Se desea que:

$$d(X, P) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

El punto es $X = (1, 2, 3)$.

25. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$.

a) Comprueba que la recta es paralela al plano.

b) Halla la distancia de r a π .

Solución:

a) La recta será paralela al plano si su vector de dirección \vec{v}_r es perpendicular al característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, 1, 1)$. Además, ningún punto de la recta puede ser del plano.

Se expresa r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 8 - 3t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-3, 1, 2).$$

Como $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (-3, 1, 2) \cdot (1, 1, 1) = -3 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow$ Los vectores son perpendiculares; y la recta paralela al plano, ya que el punto $P(8, 0, -4) \in r$ pero no a π .

b) La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d(r, \pi) = d(P = (8, 0, -4) \in r, \pi: x + y + z - 2 = 0) = \frac{8 + 0 - 4 - 2}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

26. Halla la distancia entre la recta determinada por el punto $S(1, 0, 0)$ y el vector $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z - 2 = 0$

Solución:

La recta y el plano son paralelos pues el vector director de la recta, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, y el vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, -1, 1)$, son perpendiculares, ya que:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_\pi = (1, 1, 0) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 = 0.$$

Por tanto, la distancia entre el plano y la recta viene dada por la distancia de cualquier punto de la recta, por ejemplo $S = (1, 0, 0)$ al plano. Esta distancia es:

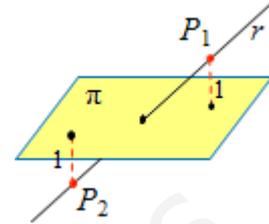
$$d(S, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

27. Halla los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Solución:

Las ecuaciones cartesianas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$

Luego, un punto genérico de r es $P = (2 + t, 1 + t, -2t)$.



Se desea que $d(P, \pi) = 1$.

Esto es:

$$d(P, \pi) = \frac{2(2+t) + 2(1+t) + (-2t) - 5}{\pm \sqrt{4+4+1}} = 1 \Rightarrow \frac{2t+1}{\pm 3} = 1.$$

- Para el denominador positivo: $+3 \rightarrow 2t + 1 = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1 = (3, 2, -2)$.
- Para el denominador negativo: $-3 \rightarrow 2t + 1 = -3 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P_2 = (0, -1, 4)$.

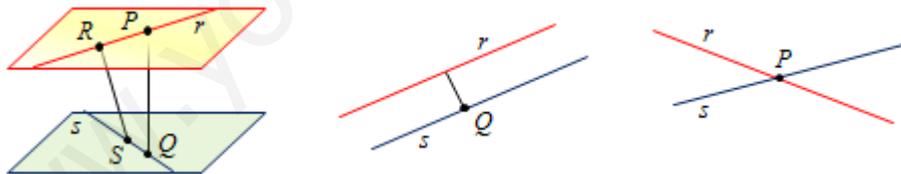
28. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

$$a) r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 11 - 4t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = h \\ z = 4 \end{cases} \quad b) r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$$

Solución:

Dependiendo de su posición relativa, la distancia mínima entre dos rectas r y s es:

- (si se cruzan) \rightarrow la existente entre el plano paralelo a s que pasa por r y el plano paralelo a r que pasa por s . (Esa distancia coincide con el módulo del vector PQ , perpendicular a los de dirección de ambas rectas.)
- (si son paralelas) \rightarrow la existente entre cualquier punto de s y la recta r .
- (si se cortan) \rightarrow cero.



La distancia entre dos rectas (que se cruzan) viene dada por la expresión

$$d(r, s) = \frac{|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS} \right]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}, \text{ siendo } \vec{v}_r \text{ y } \vec{v}_s \text{ los vectores de dirección respectivos, y } \overrightarrow{RS} \text{ un vector}$$

que va de r a s : $R \in r$ y $S \in s$. (Si las rectas se cortasen esta distancia valdría 0; si las rectas fuesen paralelas, cuestión que se detecta comparando sus vectores de dirección, esta fórmula no es válida.)

a) En este caso:

$$\vec{v}_r = (-1, 1, -4), \vec{v}_s = (1, 1, 0); \overrightarrow{RS} = (-5, 0, 4) - (3, 0, 11) = (-8, 0, -7).$$

Por tanto,

$$\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS} \right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 + 7 - 32 = -18.$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, -2) \Rightarrow |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Luego: $d(r, s) = \frac{|-18|}{6} = 3$.

b) Si se toma: $R(2, 1, 3) \in r$; $S(-1, -1, 4) \in s$, se tiene que $RS = (-3, -2, 1)$.

Por otra parte, $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (1, 3, -2)$.

El producto mixto, $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, RS] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ las rectas se cortan.

Aquí no sería necesario calcular el producto vectorial, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 5, 7)$; ni

el módulo, $|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{1 + 25 + 49} = \sqrt{75}$; ni la distancia, que es 0: $d(r, s) = \frac{0}{\sqrt{75}} = 0$.

29. Halla la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 11 - 4t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = h \\ z = 4 \end{cases}$$

Observación: Estas son las rectas del apartado a) del problema anterior.

Solución:

Si un plano es paralelo a una recta, su vector característico es perpendicular al de dirección de la recta. Por tanto, si el plano es paralelo a las rectas r y s , su vector característico será $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$,

que es perpendicular a ambos: $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, -2)$

Por tanto, la ecuación del plano será $\pi: 4x - 4y - 2z + d = 0$. (Falta por determinar d .)

Como el plano debe equidistar de las rectas r y s , y como $d(r, s) = 3$ (ver el problema anterior), su distancia a cada recta debe ser $3/2$. Esto es, $d(r, \pi) = 3/2 = d(s, \pi)$.

Por ser r y π paralelos, la distancia de r a π es la misma que la distancia del punto $R = (3, 0, 11)$ de r a π .

Por tanto,

$$d(R, \pi) = \frac{|4 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 11 + d|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{-10 + d}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 19.$$

La ecuación del plano buscado será $\pi: 4x - 4y - 2z + 19 = 0$.

Observación: También podría considerarse la posibilidad $d(R, \pi) = \frac{-10 + d}{-6} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 1$.

No obstante, la solución válida es la primera, $d = 19$.

30. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

$$a) r \equiv \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 7x - z = 8 \end{cases}; s \equiv x - 2 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4}. \quad b) r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}; s \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Solución:

a) Expresando las rectas en forma paramétrica se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -4 + 3t \\ z = -8 + 7t \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 2 + 3h \\ z = 3 + 4h \end{cases}$$

Por tanto: $\vec{v}_r = (1, 3, 7)$, $\vec{v}_s = (1, 3, 4)$ y $\overrightarrow{RS} = (2, 2, 3) - (0, -4, -8) = (2, 6, 11)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia,

las rectas r y s se cortan. Por tanto, la distancia entre ellas es 0.

$$b) \text{ Las rectas son paralelas: } r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 3h \\ z = 1 - h \end{cases}.$$

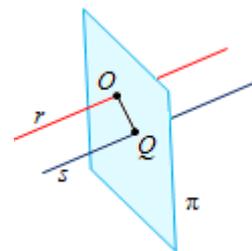
En este caso, $d(r, s) = d((0, 0, 0) \in r, s)$. Esta distancia puede calcularse, además de con la fórmula correspondiente, hallando el punto de corte del plano π , perpendicular a r (y a s) por $O(0, 0, 0) \in r$ con la recta s ; obteniéndose que $d(r, s) = d(O, Q)$.

La ecuación del plano π es: $\pi \equiv x + 3y - z = 0$; corta a la recta s cuando

$$(2 + h) + 3(3h) - (1 - h) = 0 \Rightarrow h = -1/11.$$

$$\text{Luego } Q = \left(\frac{21}{11}, \frac{-3}{11}, \frac{12}{11} \right)$$

$$\text{Con esto, } d(r, s) = d(O, Q) = \sqrt{\left(\frac{21}{11}\right)^2 + \left(\frac{-3}{11}\right)^2 + \left(\frac{12}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{11}}.$$



Planos bisector y mediador

31. Halla el plano bisector de los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$.

Solución:

Si el punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano bisector π , debe cumplir que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

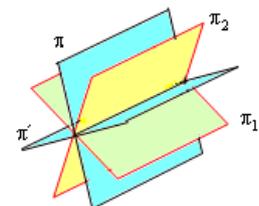
Luego,

$$\frac{x + 2y + z + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2x + y - z - 6}{\pm \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \frac{x + 2y + z + 3}{\sqrt{6}} = \frac{2x + y - z - 6}{\pm \sqrt{6}}.$$

Simplificando se obtiene los dos planos bisectores:

$$\pi: x + 2y + z + 3 = +(2x + y - z - 6) \Rightarrow \pi: x - y - 2z - 9 = 0$$

$$\pi': x + 2y + z + 3 = -(2x + y - z - 6) \Rightarrow \pi': 3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow \pi': x + y - 1 = 0.$$



32. Comprueba para los planos del ejercicio anterior:

a) Que el plano π' forma con cada uno de los dos iniciales, π_1 y π_2 , un ángulo que es la mitad que el que determinan los planos π_1 y π_2 .

b) Que los planos bisectores son perpendiculares.

Solución:

a) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el determinado por sus vectores característicos

$$\vec{v}_{\pi_1} = (1, 2, 1) \text{ y } \vec{v}_{\pi_2} = (2, 1, -1)$$

$$\text{Como } \cos(\vec{v}_{\pi_1}, \vec{v}_{\pi_2}) = \frac{\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ángulo } (\pi_1, \pi_2) = \arccos(1/2) = 60^\circ.$$

El ángulo que forman los planos π' y π_1 , es el determinado por los vectores $\vec{v}_{\pi_1} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v}_{\pi'} = (1, 1, 0)$:

$$\cos(\vec{v}_{\pi'}, \vec{v}_{\pi_1}) = \frac{\vec{v}_{\pi'} \cdot \vec{v}_{\pi_1}}{|\vec{v}_{\pi'}| \cdot |\vec{v}_{\pi_1}|} = \frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$, efectivamente, es la mitad del que forman los planos π_1 y π_2 .

b) Los vectores característicos de los planos bisectores son:

$$\vec{v}_{\pi} = (1, -1, 2) \text{ y } \vec{v}_{\pi'} = (1, 1, 0)$$

Como su producto escalar es 0: $\vec{v}_{\pi} \cdot \vec{v}_{\pi'} = (1, -1, 2) \cdot (1, 1, 0) = 1 - 1 = 0$, dichos planos son perpendiculares.

33. Halla el plano mediador de los puntos $P(1, -1, 0)$ y $Q(-1, 3, 2)$.

Solución:

Si $X = (x, y, z)$ es un punto del plano buscado, cumplirá que: $d(X, P) = d(X, Q)$

Esto es:

$$d(X, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2} = d(X, Q)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4$$

$$\Rightarrow x - 2y - z + 3 = 0$$

La ecuación del plano mediador es $x - 2y - z + 3 = 0$.

34. Dados los puntos del espacio $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$, halla la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que esté a la misma distancia de P y Q .

Solución:

Las distancias entre los puntos valen:

$$d(A, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad d(A, Q) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

La condición que debe cumplirse es que

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \Rightarrow 2y + 4z - 5 = 0$$

Evidentemente es la ecuación de un plano: el plano mediatriz de los puntos P y Q .

Otros problemas

35. a) Halla la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$.
- b) Halla la ecuación de la recta s que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(-1, -3, -4)$.
- c) Estudia la posición relativa de r y s . Si se cortan, calcula el punto de corte.
- d) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano π' que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es paralelo a π .

Solución:

- a) La recta r queda definida por $P(1, -1, -2)$ y el vector $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, normal al plano π .

$$\text{Su ecuación es: } r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

- b) La recta s está determinada por el punto $A(1, 0, 0)$ y por el vector $\mathbf{AB} = (-1, -3, -4) - (1, 0, 0) = (-2, -3, -4)$.

$$\text{Su ecuación es: } s : \begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = -3h \\ z = -4h \end{cases}$$

- c) Para determinar la posición relativa de ambas rectas hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$$\vec{v}_r = (1, 2, 3), \vec{v}_s = (-2, -3, -4) \text{ y } \mathbf{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2).$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente dependientes; lo que}$$

indica que las rectas se cortan.

$$\text{Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema: } r : \begin{cases} x = 1 + t & x = 1 - 2h \\ y = -1 + 2t & y = -3h \\ z = -2 + 3t & z = -4h \end{cases} : s.$$

$$\begin{cases} 1 + t = 1 - 2h \\ -1 + 2t = -3h \\ -2 + 3t = -4h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ h = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte: } C(3, 3, 4).$$

- d) El plano π' está determinado por el vector normal a él, que es $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, y por el punto $P(1, -1, -2)$.

$$\text{Su ecuación es: } \pi' \equiv (x - 1) + 2(y + 1) + 3(z + 2) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0.$$

La distancia de A a π' es:

$$d(A, \pi') = \left| \frac{1 + 7}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \right| = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

36. Dado el punto $P(0, 8, 3)$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

- a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a la recta s .
 b) Calcula la ecuación de la recta r , perpendicular al plano hallado y que contiene a P .

Solución:

a) El plano π , que contiene a P y a s , queda definido por el punto P y los vectores \vec{v}_s y \vec{PS} , siendo S cualquier punto de s .

Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = y - 7 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{si } z = h) \rightarrow s : \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (2, 2, 1).$$

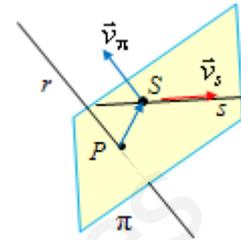
Si $S = (-7, 0, 0)$, $\vec{PS} = (-7, 0, 0) - (0, 8, 3) = (-7, -8, -3)$.

Luego, la ecuación del plano será:

$$\pi : \begin{cases} x = 2h - 7 \\ y = 8 + 2h - 8t \\ z = 3 + h - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -7 \\ y - 8 & 2 & -8 \\ z - 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 2x - y - 2z + 14 = 0.$$

b) La recta perpendicular a π lleva la dirección del vector normal al plano, $\vec{v}_\pi = (2, -1, -2)$;

como debe contener a $P(0, 8, 3)$, su ecuación será: $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 8 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$



37. Encuentra los puntos de la recta $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ que equidisten de los planos

$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 3z - 1 = 0$.

Solución:

Como la recta tiene por ecuaciones, $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$,

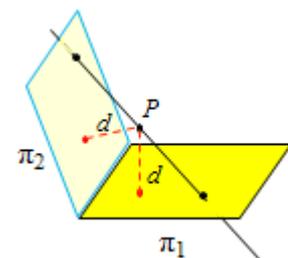
un punto genérico de ella es $P = (-1 + 2t \quad 1 + 3t \quad 2t)$

Se desea que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

Por tanto:

$$d(P, \pi_1) = \frac{3(-1 + 2t) + 4(1 + 3t) - 1}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4(-1 + 2t) - 3(2t) - 1}{\pm\sqrt{16 + 9}} = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{18t}{5} = \frac{2t - 5}{\pm 5}.$$

- Si se considera el denominador $+5 \Rightarrow 18t = 2t - 5 \Rightarrow t = -5/16 \Rightarrow P_1 = \left(\frac{-26}{16}, \frac{1}{16}, \frac{-10}{16} \right)$.
- Si se considera el denominador $-5 \Rightarrow 18t = -2t + 5 \Rightarrow t = 1/4 \Rightarrow P_2 = \left(\frac{-2}{4}, \frac{7}{4}, \frac{2}{4} \right)$.



38. Dadas las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases}$ y $s \equiv x - 2 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4}$.

- a) Estudia su posición relativa.
 b) Si se cruzan, calcula la distancia mínima entre ellas.

Solución:

a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \overrightarrow{RS} , donde $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano. Las ecuaciones paramétricas de las retas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 + 7t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 2 + 3h \\ z = 3 + 4h \end{cases}$$

Por tanto: $\vec{v}_r = (1, 3, 7)$, $\vec{v}_s = (1, 3, 4)$ y $\overrightarrow{RS} = (2, 2, 3) - (0, 1, 4) = (2, 1, -1)$

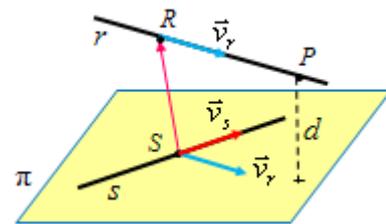
Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 27 - 35 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes \Leftrightarrow las

rectas r y s se cruzan.

b) La distancia entre ambas rectas es igual a la de un punto cualquiera P de r al plano π que contiene a s y es paralelo a r , cuya ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + h + t \\ y = 2 + 3h + 3t \\ z = 3 + 4h + 7t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-2 & 3 & 3 \\ z-3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - y - 4 = 0$$



Por tanto, $d(r, s) = d(P(0, 1, 4) \in r, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

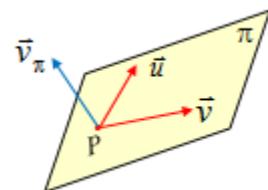
39. a) Sea π el plano determinado por el punto $P(2, 2, 2)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Calcula el ángulo que forma el plano π con la recta que pasa por los puntos $O(0, 0, 0)$ y $Q(2, -2, 2)$.

b) Calcula el punto simétrico de $O(0, 0, 0)$ respecto del plano $x - y + z - 2 = 0$.

Solución:

a) El vector normal del plano, que es ortogonal a los dos dados, se obtiene multiplicándolos vectorialmente:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$



Por tanto, el plano pedido es

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 2) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$$

La recta que pasa por O y Q es: $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.

El seno del ángulo (r, π) , $\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| |\vec{v}_r|}$, siendo $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$ el vector de dirección de la recta y $\vec{v}_\pi = (1, -1, 1)$ el vector normal al plano. Como ambos vectores son iguales, la recta es perpendicular al plano.

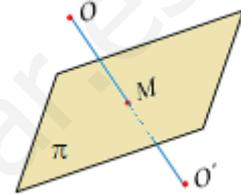
b) El punto pedido, O' , estará en la recta r y a la misma distancia del plano que O . El punto M , de corte de la recta y el plano, es el punto medio entre O y O' .

$M: t - (-t) + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2/3;$

Luego $M = (2/3, -2/3, 2/3)$.

Si $O' = (a, b, c) \Rightarrow M = (a/2, b/2, c/2) = (2/3, -2/3, 2/3)$

$\Rightarrow a = 4/3, b = -4/3, c = 4/3 \Rightarrow O' = (4/3, -4/3, 4/3)$.



40. (Propuesto en Selectividad en 2006, Madrid)

Sean las rectas:

$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$

- a) Halla la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- b) Halla la recta perpendicular común a las retas r y s .

Solución:

a) La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r , que contiene a r y pasa por el origen, y π_s , que contiene a s y pasa por el origen.

Plano π_r :

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $OA = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v}_r = (-2, 2, -4)$; el punto $A(-1, 2, 0)$ pertenece a la recta r .

Su ecuación es:

$\pi_r: \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ y & 2 & 2 \\ z & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r: 4x + 2y - z = 0$

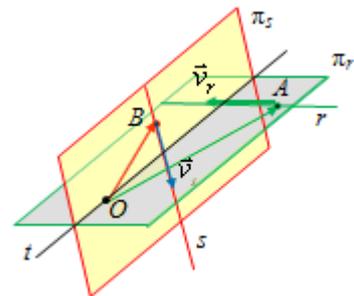
Plano π_s :

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $OB = (2, -1, -2)$ y $\vec{v}_s = (3, 1, 1)$; el punto $B(2, -1, -2)$ pertenece a la recta s .

Su ecuación es:

$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & -1 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s: x - 8y + 5z = 0$

Por tanto, $t: \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$.



b) Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

$R = (-1 - 2h, 2 + 2h, -4h), S = (2 + 3p, -1 + p, -2 + p)$

El vector $\mathbf{SR} = (-3 - 2h - 3p, 3 + 2h - p, 2 - 4h - p)$, que indica la dirección de todas las rectas que se apoyan en r y s , debe ser perpendicular a los de dirección de r y s :

$$\vec{v}_r = (-2, 2, -4) \text{ y } \vec{v}_s = (3, 1, 1).$$

Multiplicando escalarmente ($\mathbf{SR} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\mathbf{SR} \cdot \vec{v}_s = 0$), se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} 24h + 8p + 4 = 0 \\ -8h - 11p - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{-3}{50} \text{ y } p = \frac{-8}{25}.$$

Con esto:

$$R = \left(\frac{-44}{50}, \frac{94}{50}, \frac{12}{50} \right) = \left(\frac{-22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25} \right), S = \left(\frac{26}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-58}{25} \right) \text{ y}$$

$$\mathbf{RS} = \left(\frac{-48}{25}, \frac{80}{25}, \frac{64}{25} \right) = (-3, 5, 4).$$

La recta perpendicular común será:
$$\begin{cases} x = -22/25 - 3t \\ y = 47/25 + 5t \\ z = 6/25 + 4t \end{cases}$$

41. Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \quad \pi: 2x + 4y + 4z = 5$$

- Comprueba que la recta r y el plano π son paralelos.
- Calcula la distancia entre el plano π y la recta r .
- Calcula la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r .

Solución:

a) El vector de dirección de la recta es: $\vec{v}_r = (2, -5, 4)$.

El vector característico del plano: $\vec{v}_\pi = (2, 4, 4)$.

Ambos vectores son perpendiculares, pues $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (2, -5, 4) \cdot (2, 4, 4) = 0$.

Además, el punto $P(1, -5, -3) \in r$ no pertenece al plano, pues:

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) + 4 \cdot (-3) = -30 \neq 5.$$

En consecuencia, la recta es paralela al plano.

b) La distancia de π a r es igual a la distancia del punto P de r al plano.

$$d(P, \pi) = d(P(1, -5, -3), \pi: 2x + 4y + 4z - 5 = 0) = \frac{|2 - 20 - 12 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{35}{6}.$$

c) El plano pedido viene determinado por el punto P y los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_π .

Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y = -5 - 5\lambda + 4\mu \\ z = -3 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+5 & -5 & 4 \\ z+3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - z - 5 = 0.$$

42. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla León)

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(1, 3, 1)$; los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R(-4, 7, -6)$.

- a) Calcula la ecuación de la recta r . (0,5 puntos)
- b) Calcula la ecuación general del plano que contiene al cuadrado. (1 punto)
- c) Halla las coordenadas de uno de los otros vértices. (1,5 puntos)

Solución:

a) El vector director de la recta r es $\overrightarrow{PQ} = (1, 3, 1) - (2, 1, 3) = (-1, 2, -2)$.

Luego, $r \equiv \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 7 + 2t \\ z = -6 - 2t \end{cases}$.

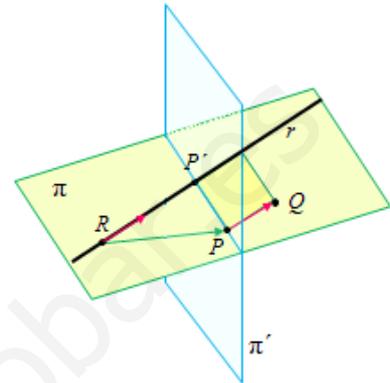
b) Para determinar el plano se necesita otro vector:

$$\overrightarrow{RP} = (2, 1, 3) - (-4, 7, -6) = (6, -6, 9) \equiv (2, -2, 3)$$

El plano será:

$$\pi: \begin{cases} x = -4 - t + 2h \\ y = 7 + 2t - 2h \\ z = -6 - 2t + 3h \end{cases} \Leftrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+4 & -1 & 2 \\ y-7 & 2 & -2 \\ z+6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: 2(x+4) - (y-7) - 2(z+6) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 2z + 3 = 0.$$



c) Por ejemplo, P' , que será el proyectado de P sobre r . Dicho punto se obtiene mediante el corte de la recta con el plano π' , que contiene a P y es perpendicular a la recta r . Su vector característico es: $\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_r = (-1, 2, -2)$.

Luego, $\pi': -(x-2) + 2(y-1) - 2(z-3) = 0 \Rightarrow \pi': -x + 2y - 2z + 6 = 0$.

El punto P' se obtiene sustituyendo las ecuaciones de la recta r en la del plano π' .

$$-(-4-t) + 2(7+2t) - 2(-6-2t) + 6 = 0 \Rightarrow 9t + 36 = 0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow P' = (0, -1, 2).$$

De otra forma:

Otro vértice del cuadrado es el punto de la recta que está a distancia $|\overrightarrow{PQ}|$, el lado del cuadrado, del punto P . Como el punto genérico de la recta es $X(-4-t, 7+2t, -6-2t)$, se tendrá que $d(P, X \in r) = \sqrt{(-6-t)^2 + (6+2t)^2 + (-9-2t)^2} = d(P, Q) = 3 \Rightarrow t = -4$, como solución única (lo que confirma que se trata de un cuadrado), uno de los vértices en la recta es $P' = (0, -1, 2)$.

43. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 3x - 4y + 5 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 9 = 0$$

¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

Solución:

Sea P un punto de ese lugar. Debe cumplir que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

$$\frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2x - 2y + z + 9}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{3x - 4y + 5}{5} = \frac{2x - 2y + z + 9}{\pm 3}$$

Se tendrá:

Para +3: $\frac{3x - 4y + 5}{5} = \frac{2x - 2y + z + 9}{3} \Rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \quad (1)$

Para -3 : $\frac{3x - 4y + 5}{5} = \frac{2x - 2y + z + 9}{-3} \Rightarrow 19x - 22y + 5z + 60 = 0$ (2)

Son los planos bisectores de los planos dados.

Los puntos del eje OY son de la forma $(0, y, 0)$; esto es, $x = 0$ y $z = 0$. Como deben ser de los planos anteriores, se tendrá:

- (1) $2y + 30 = 0 \Rightarrow y = -15$. Punto $(0, -15, 0)$.
- (2) $-22y + 60 = 0 \Rightarrow y = \frac{30}{11}$. Punto $(0, 30/11, 0)$.

44. (Propuesto en Selectividad en 2009, Navarra)

Dado el punto $R(1, -1, 2)$, encuentra los puntos P y Q de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

tales que PQR sea un triángulo equilátero.

Solución:

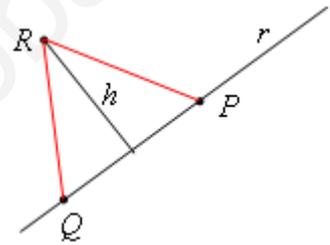
La situación gráfica es la que se indica en la figura.

Para que el triángulo PQR sea equilátero, las distancias entre cada dos vértices deben ser iguales:

$$d(R, P) = d(R, Q) = d(P, Q) = l.$$

Además, en todo triángulo equilátero, la relación entre la medida

del lado y de la altura es: $h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.



En este caso, $h = d(R, r) = \frac{|\vec{AR} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$, con $A \in r$.

Para calcular esa distancia conviene obtener las ecuaciones paramétricas de r :

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 4 - z \\ x + 2y = 6 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 - E2 \\ E2 - E1 \\ z = t \end{matrix} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Por tanto: $R = (1, -1, 2)$, $A = (2, 2, 0)$, $\vec{AR} = (-1, -3, 2)$, $\vec{v}_r = (0, -1, 1)$

$$\text{Luego, } \vec{AR} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

Como $|\vec{AR} \times \vec{v}_r| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v}_r| = \sqrt{2}$, se tendrá que $d(R, r) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = h$.

De $l = \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Luego, la $d(R, P) = \sqrt{2}$

Si P es un punto genérico de r , $P = (2, 2 - t, t)$, entonces, como $R(1, -1, 2)$,

$$d(R, P) = \sqrt{2} \Rightarrow d(R, P) = \sqrt{1^2 + (3 - t)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2t^2 - 10t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ o } t = 3.$$

Para $t = 2$, $P(2, 0, 2)$; y para $t = 3$, $Q(2, -1, 3)$.

Puede comprobarse que $d(P, Q) = \sqrt{2}$.

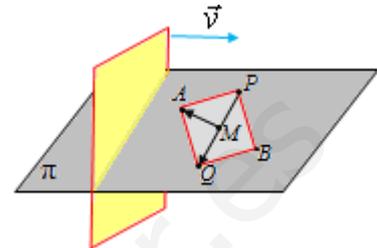
45. Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.

- Determina los otros dos vértices.
- Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices obtenidos en a).
- Calcula el perímetro del cuadrado construido.

Solución:

a) El plano π que contiene al cuadrado está definido por el punto P (o por el Q) y los vectores $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$, normal del plano dado.

Su ecuación es $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t + h \\ y = -1 - 2t + h \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$.



(Obsérvese que se da la circunstancia de que \overrightarrow{PQ} es perpendicular a \vec{v}_π .)

El punto medio del segmento $P-Q$, $M(2, -2, 2)$, es donde se cortan las diagonales del cuadrado. Por tanto se cumplirá que los vectores \overrightarrow{PM} y \overrightarrow{MA} sean perpendiculares y tengan el mismo módulo.

El vector $\overrightarrow{PM} = (1, -1, 1)$; y su módulo vale $\sqrt{3}$.

El vector \overrightarrow{MA} debe ser perpendicular a \overrightarrow{PM} , tener también módulo $\sqrt{3}$ y pertenecer al plano π .

Como $\vec{v} = (1, 1, 0)$ es perpendicular a \overrightarrow{PQ} , está en el plano π y tiene módulo $\sqrt{2}$, entonces

$$\overrightarrow{MA} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

Como $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, las coordenadas de A serán:

$$A = (2, -2, 2) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$

Análogamente, las coordenadas de B son:

$$B = (2, -2, 2) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$

b) La recta definida por los puntos A y B es la que pasa por M con vector de dirección $\vec{v} = (1, 1, 0)$. Su ecuación será

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

c) El perímetro del cuadrado es:

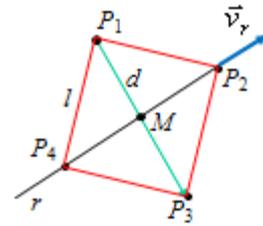
$$p = 4 \cdot l = 4 \cdot d(P, A) = 4 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = 4\sqrt{6}.$$

46. Los puntos $P_1(2, -3, 3)$ y $P_3(0, 1, -1)$ son vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices de ese cuadrado sabiendo que están en la recta $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Solución:

La situación debe ser la que se muestra en el siguiente dibujo.

Para que el problema tenga solución, la dirección del vector $\overrightarrow{P_1P_3}$ debe ser perpendicular al vector de dirección de la recta y, además, la distancia de cada uno de los puntos a la recta debe ser la misma (esto último equivale a que el punto medio de $P_1 - P_3$ es de la recta).



Se tiene:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, -1) - (2, -3, 3) = (-2, 4, -4); \quad \vec{v}_r = (-2, 1, 2).$$

Como $\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \vec{v}_r = (-2, 4, -4) \cdot (-2, 1, 2) = 4 + 4 - 8 = 0$, los vectores son perpendiculares.

El punto medio de $P_1 - P_3$ es $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = (1, -1, 1)$

Las ecuaciones paramétricas de r son:
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
 Como puede verse, para $t = 1$, se obtiene

el punto $M(1, -1, 1)$.

Por tanto, se verifican las dos premisas necesarias.

Ahora puede observarse:

1) La distancia $d(P_1, P_3)$ es la diagonal, d , del cuadrado.

2) El lado, l , de un cuadrado es igual a $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$. (Por Pitágoras: $d^2 = l^2 + l^2$).

3) Por tanto, los vértices P_2 y P_4 serán los puntos de la recta que se encuentren a distancia l de P_1 (o de P_3).

La diagonal vale: $d = d(P_1, P_3) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$. El lado $l = 3\sqrt{2}$.

Los vértices P_2 y P_4 son las soluciones de la ecuación:

$$d(P_1 = (2, -3, 3), X \in r, X = (3 - 2t, -2 + t, -1 + 2t)) = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-2t)^2 + (1+t)^2 + (-4+2t)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o } t = 2.$$

Luego: $P_2 = (3, -2, -1)$ y $P_4 = (-1, 0, 3)$.