

## Vectores en el espacio

### Problemas Resueltos

#### Vectores

1. Para  $\vec{a} = (1, -2, 3)$  y  $\vec{b} = (3, -1, 4)$ , halla:

a)  $\vec{a} + \vec{b}$     b)  $2\vec{a} - \vec{b}$     c)  $-\vec{a} + 3\vec{b}$     d)  $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Solución:

a)  $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 3) + (3, -1, 4) = (4, -3, 7)$ .

b)  $2\vec{a} - \vec{b} = 2 \cdot (1, -2, 3) - (3, -1, 4) = (2 - 3, -4 + 1, 6 - 4) = (-1, -3, 2)$ .

c)  $-\vec{a} + 3\vec{b} = -(1, -2, 3) + 3 \cdot (3, -1, 4) = (-1 + 9, 2 - 3, -3 + 12) = (8, -1, 9)$ .

d)  $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda(1, -2, 3) + \mu(3, -1, 4) = (\lambda + 3\mu, -2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu)$ .

2. a) A partir de la definición de dependencia lineal de vectores, demuestra que los vectores  $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$  son linealmente independientes.

b) Expresa el vector  $\vec{v} = (3, -2, 3)$  en función de los vectores anteriores.

Solución:

Debe comprobarse que la relación  $\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$  sólo se cumple cuando  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = 0$ .

En efecto:

$$\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{Por Gauss}) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E3 + E1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E3 - 2E2} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya única solución es  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = 0$ .

b) Como los vectores anteriores son linealmente independientes constituyen una base de  $\mathbf{R}^3$ ; en consecuencia, cualquier vector depende linealmente de ellos.

En este caso, hay que encontrar los valores de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  tales que:

$$(3, -2, 3) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1)$$

$$\text{Esto es: } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{E3 + E1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 4\lambda_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 5/2, \lambda_2 = 1/2 \text{ y } \lambda_1 = 1/2$$

$$\text{Luego, } (3, -2, 3) = \frac{1}{2}(1, 0, -1) + \frac{1}{2}(0, 1, 2) + \frac{5}{2}(1, -1, 1).$$

3. Dados los puntos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, -1)$  y  $D(-1, 1, 1)$ , halla los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{CD}$ . Comprueba si son linealmente dependientes o no. Da una interpretación geométrica del hecho.

Solución:

Los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{CD}$  son:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

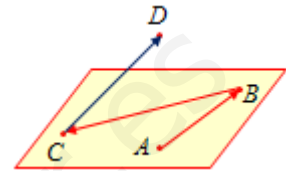
$$\overrightarrow{BC} = (0, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-2, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 1) - (0, 0, -1) = (-1, 1, 2)$$

Para ver si son linealmente independientes se hace el determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 5 - 3 \neq 0$$

Al ser distinto de 0, los vectores son linealmente independientes. Eso significa que no hay ningún plano que contenga a los cuatro puntos, que los vectores no son coplanarios.



4. Para los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{CD}$ , del ejercicio anterior, halla:

a) El módulo de cada uno de ellos.

b) El producto escalar  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

c) El ángulo que forman  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$ .

Solución:

a)  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ .

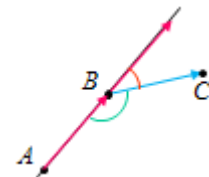
$$\overrightarrow{BC} = (-2, -1, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1) \cdot (-2, -1, -1) = -2 - 1 - 1 = -4$ .

c)  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ángulo}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 160,53^\circ; \text{ o mejor, } 180^\circ - 160,53^\circ = 19,47^\circ$$



5. Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que los puntos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(a, 2, b)$  y  $C(1, 0, 0)$  estén alineados.

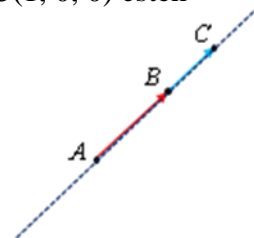
Solución:

Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados cuando los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  son proporcionales. Esto es, cuando  $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

Como  $\overrightarrow{AB} = (a, 2, b) - (1, 1, 1) = (a - 1, 1, b - 1)$ , y

$\overrightarrow{AC} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$ , debe cumplirse que:

$$(a - 1, 1, b - 1) = k \cdot (0, -1, -1) = (0, -k, -k) \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ 1 = -k \Rightarrow k = -1; a = 1; b = 2. \\ b - 1 = -k \end{cases}$$



6. Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores

$$\vec{u} = (2, 0, 9), \vec{v} = (3, -1, 2), \vec{w} = (5, -1, 4)$$

Solución:

Los vectores serán linealmente independientes si su determinante asociado es distinto de cero; en caso contrario serán linealmente dependientes.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \text{ los vectores dados son linealmente independientes.}$$

7. a) Estudia, en función del valor del parámetro  $a$ , la dependencia e independencia lineal de los vectores  $\vec{v}_1 = (a, -a, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (2a, 1, 1)$  y  $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ .

b) Cuando sean linealmente dependientes, escribe  $\vec{v}_3$  como combinación lineal de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ .

Solución:

$$\text{a) Como } \begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ o } a = -1/2$$

Por tanto:

Si  $a = -1$  o  $a = -1/2$  los vectores son linealmente dependientes  $\rightarrow$  El determinante vale 0.

Si  $a \neq -1$  y  $a \neq -1/2$  los vectores son linealmente independientes.

b) Para  $a = -1$ , los vectores son:  $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$  y  $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ .

$$\text{Luego: } \vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = -\vec{v}_1.$$

Para  $a = -1/2$ , los vectores son:  $\vec{v}_1 = (-1/2, 1/2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$  y  $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ .

$$\text{Luego: } \vec{v}_3 = 0 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_2$$

8. Halla la relación que debe existir entre  $a$  y  $b$  para que los puntos de coordenadas  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(a, b, 0)$ ,  $C(a, 0, b)$  y  $D(0, a, b)$  estén en un plano.

Solución:

Cuatro puntos pertenecen a un mismo plano cuando tres de los vectores que determinan son linealmente dependientes.

Si  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(a, b, 0)$ ,  $C(a, 0, b)$  y  $D(0, a, b)$ , los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  y  $\vec{AD}$  son:

$$\vec{AB} = (a, b, 0) - (1, 0, 0) = (a-1, b, 0)$$

$$\vec{AC} = (a, 0, b) - (1, 0, 0) = (a-1, 0, b)$$

$$\vec{AD} = (0, a, b) - (1, 0, 0) = (-1, a, b)$$

$$\text{Serán linealmente dependientes si } \begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a-1)ab - b[(a-1)b + b] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2b + ab - b^2a = 0 \Leftrightarrow ab(a+b-1) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:  $a = 0$ ,  $b = 0$  o  $a + b = 1$ .

Por tanto, los cuatro puntos dados estarán en un plano cuando  $a = 0$ ,  $b = 0$  o  $a + b = 1$ .

Si  $a = 0$  los puntos son:  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, 0, b)$  y  $(0, 0, b)$ ; los dos últimos coinciden.

Si  $b = 0$  los puntos son:  $(1, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$  y  $(0, a, 0)$ ; coinciden otros dos.

Luego, para que los cuatro puntos sean distintos y estén en el mismo plano es necesario que  $a + b = 1$ , con  $a$  y  $b$  distintos de 0.

## Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto

9. a) Calcula el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (2, 1, 1)$  y  $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ .  
b) ¿Cuánto debe valer  $a$  para que los vectores  $\vec{u} = (2, a, 1)$  y  $\vec{v} = (-1, a, 1)$  sean perpendiculares.

Solución:

- a) El coseno del ángulo que forman los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  viene dado por:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(2, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

Los vectores son perpendiculares.

- b) Su producto escalar debe ser 0:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Luego,

$$(2, a, 1) \cdot (-1, a, 1) = 0 \Rightarrow -2 + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

10. Dados los puntos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(2, 1, 0)$  y  $C(0, 0, -1)$ , determina otro punto  $D$  de manera que  $ABCD$  sean vértices consecutivos de un paralelogramo. Determina el punto de corte de sus diagonales y el área de ese paralelogramo.

Solución:

Si  $ABCD$  son vértices consecutivos de un paralelogramo, debe cumplirse que los vectores libres  $\vec{AB}$  y  $\vec{DC}$  sean iguales.

Si  $D = (a, b, c)$ ,  $\vec{DC} \Rightarrow (0, 0, -1) - (a, b, c) = (-a, -b, -1 - c)$

Como  $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ , entonces:

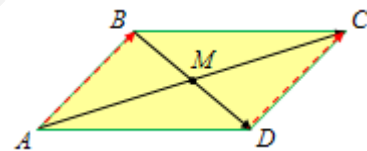
$$(1, 1, 1) = (-a, -b, -1 - c) \Rightarrow D = (-1, -1, -2).$$

El punto de corte de sus diagonales coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo la diagonal  $AC$ . Sus coordenadas son:

$$M = \left( \frac{1+0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{-1-1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, 0, -1 \right).$$

El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de dos de los vectores de determinan sus lados:  $S = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$ .

$$\text{Por tanto: } |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1) \rightarrow S = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ u}^2.$$



11. Dados los vectores  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (1, 1, 0)$ , calcula los vectores unitarios de  $\mathbf{R}^3$  que son ortogonales a ambos.

Solución:

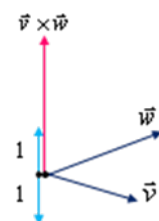
Un vector ortogonal a dos dados se obtiene multiplicándolos vectorialmente.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Este vector es perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , pues los productos escalares:

$$(1, 0, -1) \cdot (1, -1, 1) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 + 0 = 0$$



Un vector unitario en la dirección de uno dado,  $\vec{a}$ , es  $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ . En este caso, los vectores

unitarios pedidos serán:  $\pm \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

12. a) Demuestra que los puntos  $A(\lambda, 2, \lambda)$ ,  $B(2, -\lambda, 0)$  y  $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$  son vértices de un triángulo isósceles.

b) Para  $\lambda = 2$  determina su área.

c) Para  $\lambda = 0$ , si los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se trasladan según el vector  $\vec{v} = (1, -1, 3)$  se obtiene un prisma triangular. Halla los nuevos vértices y el volumen del prisma.

**Solución:**

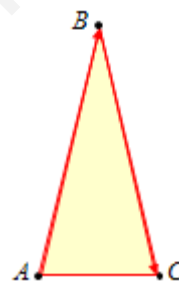
a) Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales. Por tanto, en este caso, habrá que ver que el módulo de dos de los vectores  $\vec{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda)$ ,  $\vec{AC} = (0, -2, 2)$  y  $\vec{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2)$  es el mismo.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{0 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 2)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$$

Como resulta evidente, los lados  $AB$  y  $BC$  miden lo mismo. Por tanto, el triángulo será isósceles; y para  $\lambda = 0$ , equilátero.



b) Si  $\lambda = 2$ :  $\vec{AB} = (0, -4, -2)$ ,  $\vec{AC} = (0, -2, 2)$  y  $\vec{BC} = (0, 2, 4)$ .

El área del triángulo viene dada por  $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ .

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-12, 0, 0) \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 12 \Rightarrow S = 6 \text{ u}^2.$$

c) Si  $\lambda = 0$ , los puntos son:  $A(0, 2, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$  y  $C(0, 0, 2)$ ; y los trasladados serán:

$$A' \rightarrow (0, 2, 0) + (1, -1, 3) = (1, 1, 3);$$

$$B' \rightarrow (2, 0, 0) + (1, -1, 3) = (3, -1, 3);$$

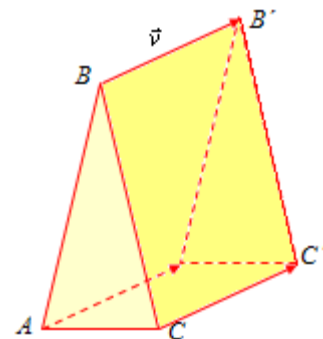
$$C' \rightarrow (0, 0, 2) + (1, -1, 3) = (1, -1, 5).$$

Además:  $\vec{AB} = (2, -2, 0)$ ,  $\vec{AC} = (0, -2, 2)$  y  $\vec{AA'} = \vec{v} = (1, -1, 3)$ .

El volumen del prisma triangular vale la mitad que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  y  $\vec{AA'}$ .

Será:

$$V = \frac{1}{2} \left[ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AA'} \right] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2(-6+2) + 2(-2)| = 6 \text{ u}^3.$$



13. Determina el valor de  $a$  para que los puntos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$  y  $C(1, 6, a)$  sean los vértices de un triángulo de área  $3/2$ .

Solución:

El área del triángulo que determinan los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  viene dada por  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

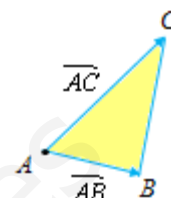
En este caso:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (1, 0, 1) = (0, 1, 0); \quad \overrightarrow{AC} = (1, 6, a) - (1, 0, 1) = (0, 6, a-1)$$

Luego

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-1)^2} = \pm(a-1) \text{ y } S = \frac{1}{2} |a-1|$$



Como se desea que  $S = 3/2$ , y teniendo en cuenta que el valor absoluto presenta dos posibilidades, se tendrá:

$$\frac{1}{2}(a-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 4; \quad \frac{1}{2}(1-a) = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -2$$

Por tanto, el triángulo tiene área  $3/2$  si  $a = 4$  o  $a = -2$ .

14. (Propuesto en Selectividad, Madrid 2012)

Dados los puntos  $P_1(1, 3, -1)$ ,  $P_2(a, 2, 0)$ ,  $P_3(1, 5, 4)$  y  $P_4(2, 0, 2)$ , se pide:

a) Hallar el valor de  $a$  para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) Hallar los valores de  $a$  para que el tetraedro con vértices en  $P_1, P_2, P_3, P_4$  tenga volumen igual a 7.

Solución:

a) Los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  están en el mismo plano si los vectores  $P_1P_2, P_1P_3$  y  $P_1P_4$  son linealmente dependientes.

Esos vectores son:

$$P_1P_2 = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a-1, -1, 1);$$

$$P_1P_3 = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5)$$

$$P_1P_4 = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3).$$

Serán linealmente dependientes cuando  $\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 21a - 28 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$ .

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores  $P_1P_2, P_1P_3$  y  $P_1P_4$ . Su valor es:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{P_1P_2} & \overrightarrow{P_1P_3} & \overrightarrow{P_1P_4} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |21a - 21 - 7| = \frac{1}{6} |21a - 28| = 7$$

Dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a - 28) = 7 \Rightarrow a = \frac{70}{21} = \frac{10}{3}; \text{ o bien, } \frac{1}{6}(-21a + 28) = 7 \Rightarrow a = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$$

15. Dados los vectores:  $\vec{a} = (2, -1, 4)$  y  $\vec{b} = (0, 3, \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

a) Halla el valor de  $\lambda$  para que  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean ortogonales.

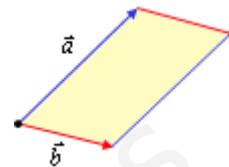
b) Para  $\lambda = 0$  calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 4) \cdot (0, 3, \lambda) = -3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

b) El área del paralelogramo que determinan los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  viene dada por el módulo del producto vectorial los vectores  $\vec{a} \times \vec{b}$ .



Para  $\lambda = 0$ ,  $\vec{b} = (0, 3, 0)$ , luego:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-12, 0, 6) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

El área del paralelogramo vale  $\sqrt{180} \text{ u}^2$ .

16. Dados los puntos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(0, 5, 3)$  y  $D(-1, 4, 3)$ .

a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano.

b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos  $ABCD$  es rectángulo.

c) Calcula el área de dicho rectángulo.

Solución:

a) Los cuatro puntos pertenecerán al mismo plano si los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  y  $\vec{AD}$  son linealmente dependientes.

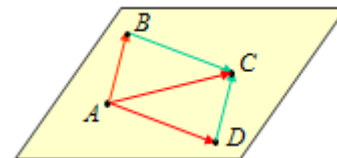
Estos vectores son:

$$\vec{AB} = (2, 3, 1) - (1, 2, 1) = (1, 1, 0);$$

$$\vec{AC} = (2, 3, 1) - (1, 2, 1) = (-1, 3, 2)$$

$$\vec{AD} = (-1, 4, 3) - (1, 2, 1) = (-2, 2, 2)$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , los vectores, efectivamente, son linealmente dependientes.



b) El cuadrilátero será rectángulo si los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$ , y  $\vec{AB}$  y  $\vec{AD}$  son perpendiculares. Por tanto, sus productos escalares deben valer 0.

Como  $\vec{AB} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{BC} = (-2, 2, 2)$  y  $\vec{AD} = (-2, 2, 2)$ , se tiene:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = (1, 1, 0) \cdot (-2, 2, 2) = 0$$

Por tanto, se trata de un rectángulo.

c) Por tratarse de un rectángulo, su superficie se halla multiplicando su base por su altura. La base puede ser el módulo de  $\vec{AB}$ ; la altura, el módulo de  $\vec{AD}$ .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad |\vec{AD}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Por tanto,

$$S = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{24} \text{ u}^2.$$

Observación: La superficie también podría hallarse mediante el producto vectorial.