Instituto Rey Pastor	Matemáticas	2º Bachillerato	Álgebra	Examen modelo

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Hallar el rango de A en función de los valores de k.
b) Para k = 2 hallar, si existe, la solución del sistema A X = B.
c) Para k = 1 hallar, si existe, la solución del sistema A X = C.

a) $|A| = \begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2k\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -2 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4k\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = -4k\left(1-k^2\right)$

k factor en f_1 y 2 en f_3 $f_2 \to f_2 - f_1$ desarrollando por f_2

$|A| = 0 \;\to\; -4k(1-k^2) = 0 \;\to\; k = 0 \;,\; k = 1 \;,\; k = -1$

Por tanto, $\forall k \neq 0, k \neq \pm 1 \to |A| \neq 0 \to rango(A) = 3$

$k = 0 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$ rango(A) = 2

$k = 1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$ rango (A) = 2 pues $f_3 = -2 f_2$

$k = -1 \to A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$ rango (A) = 2 porque $f_3 = 2 f_1$

b) Para k = 2, resolvemos por el método de Gauss el sistema A X = B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to y = 0 \to \begin{cases} x + 2z = 6 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$$

$z = 4 - 2x \;\to\; x + 8 - 4x = 6 \;\to\; 2 = 3x \;\to\; x = \frac{2}{3} \;\to\; z = \frac{8}{3}$

c) Para k = 1, el sistema A X = C queda así: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ que es claramente incompatible por serlo sus dos últimas ecuaciones.

2. Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab & b^2 \\ 2a-2b & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & ab & b^2 \\ 2(a-b) & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$c_1 \rightarrow c_1 - c_3$ (a-b) factor de c_1

$$= (a-b)\begin{vmatrix} (a+b) & ab & b^2 \\ 2 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} a+b & ab & b^2-ab \\ 2 & a+b & 2b-(a+b) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} (a+b) & ab & b(b-a) \\ 2 & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$c_3 \rightarrow c_3 - c_2$ (b-a) factor en c_3

$$= (a-b)(b-a)\begin{vmatrix} (a+b) & ab & b \\ 2 & a+b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(b-a)(-1)\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b-2b) = (a-b)^3$$

desarrollo por f_3

3. Encontrar un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices B de dimensión 2x2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda x + 3y = 3x + 9y \\ y = 3y \\ \lambda z + 3t = 3z + 9t \\ t = 3t \end{cases} \rightarrow \; y = 0 \;,\; t = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda x = 3x \\ \lambda z = 3z \end{cases} \rightarrow \lambda = 3$$

λ tiene que valer 3, porque si no, resultaría x = 0 = z, y sería B = 0

$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$ con $x \neq 0$ o $z \neq 0$ para que B no sea la matriz nula

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{-1}

b) Hallar la matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$

a) $|A| = 1$, $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para calcular la matriz X, la despejamos de la ecuación $A \cdot X \cdot A^t = B$. Para ello multiplicamos esta ecuación, por la izquierda, por A^{-1} y , por la derecha, por $(A^t)^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}$$

$|A^t| = |A| = 1$, $\text{Adj}(A^t) = (\text{Adj } A)^t = A^{-1}$, $(A^t)^{-1} = [\text{Adj}(A^t)]^t = (A^{-1})^t$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Dado el sistema

$$\begin{cases} (1-a)x-2y+4z=0 \\ x-(1+a)y+z=0 \\ -x+ay-z=0 \end{cases}$$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.
b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

a) Se trata de un sistema homogéneo por lo que siempre será compatible. Habrá que ver cuándo (para qué valores de a) es determinado o indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1)(a-1+4) = -(a+3)$$

$f_2 \longrightarrow f_2+f_1$ desarrollo por f_2

Si $a \neq -3$, $|A| \neq 0$, rango(A) = 3 , sistema compatible determinado.

Si a = - 3 el sistema será compatible indeterminado.

b) Para a = - 3 lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to y=0 \to \begin{cases} 2x+2z=0 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=-\lambda \end{cases}$$

$f_1 \longrightarrow \frac{1}{2} f_1$
$f_3 \longrightarrow f_3 + f_2$

6. a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema $\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$

b) Resolverlo en los casos en que sea compatible.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 8 + 3\lambda - 4\lambda^2 - 2 + 6\lambda = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$

$|A| = 0 \rightarrow \lambda = 2$, $\lambda = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 5/2$, $|A| \neq 0$, rango(A) = 3 = rango(A') sistema compatible determinado.

Para λ = 2 , $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ ya sabemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces c_1 y c_2 son independientes. Para analizar el rango de la matriz ampliada A' calculamos $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, luego rango A' = 3 y el sistema es incompatible.

Para $\lambda = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 5 & 2 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Al igual que antes,

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{25}{2} - \frac{28}{2} + 40 \neq 0$, rango (A') = 3 y el sistema es incompatible.

b) Utilizaremos la regla de Cramer:

$$A_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 4\lambda + 3\lambda - 2\lambda^3 - 2 + 3 = -2\lambda^3 + 1 \rightarrow x = \frac{-2\lambda^3 + 1}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 1 + 4\lambda^2 = 6\lambda^2 - 2\lambda - 5 \rightarrow y = \frac{6\lambda^2 - 2\lambda - 5}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

$$A_z = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^3 + 8 + 3 - 4\lambda - 4\lambda - 6\lambda = 4\lambda^3 - 14\lambda + 11 \rightarrow z = \frac{4\lambda^3 - 14\lambda + 11}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$.

b) Hallar A^n.

$A = 2M$, siendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M$

a) $A^2 = (2M)^2 = 4M^2 = 4M$

$A^3 = (2M)^3 = 8M^3 = 8M^2 M = 8MM = 8M^2 = 8M$

$A^3 - 2A^2 = 8M - 2 \cdot (4M) = 8M - 8M = 0$

b) $A^n = (2M)^n = 2^n \cdot M^n$

Pero $M^3 = M^2 M = MM = M^2 = M$, $M^4 = M^3 M = MM = M^2 = M$, …

Y $M^n = M$ por lo que $A^n = (2M)^n = 2^n \cdot M^n = 2^n M$