Prueba final B

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Se consideran las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial $AX = B$ por el método de la matriz inversa en aquellos casos en los que existe A^{-1}.

2. Discute según los valores del parámetro k y resuelve el sistema $\begin{cases} 6x + 4y + 2kz = 2 \\ kx + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 2k \end{cases}$.

3. Sin desarrollar los determinantes, demuestra la siguiente igualdad: $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$.

4. Se consideran las rectas: $r: \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$, $s: \begin{cases} 2x - z = -2 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$.

Halla el valor de m para el que las rectas r y s son paralelas.

Para el valor de m obtenido, determina la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

5. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

6. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico:

I) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = -1 + 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una, determina sus ecuaciones cartesianas e identifica de qué lugares geométricos se trata.

b) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

7. Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{sen}^2 x}$.

a) Calcula los extremos relativos y/o absolutos de la función en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

b) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$.

8. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Determina su dominio y calcula los límites laterales cuando $x \to 1$.

b) Estudia su continuidad y halla el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

9. Calcula el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2 + x - 1)}{\int_1^x e^{2t}\, dt}$.

10. Se considera el recinto limitado por la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+5}$, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

a) Determina el área de dicho recinto.

b) Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje de abscisas.

1. Como $|A| = (a-2)(a-7)$, A^{-1} existe siempre que $a \neq 2$ y $a \neq 7$. Entonces la solución del sistema es:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{(a-2)(a-7)}\begin{pmatrix} -5a-4 & 15-4a & 3+a^2 \\ 6 & a-5 & -1-a \\ 4-a & 1 & a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{a-7}\begin{pmatrix} 3a-8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $|A| = 2(3k^2 - 11k + 8) = 2(x-1)(3k-8)$. Por tanto:

Si $k \neq 1$ y $k \neq \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. La solución es:

$$\left(x = \frac{-2(k^2-k+3)}{(k-1)(3k-8)}, y = \frac{k^3-7k+13}{(k-1)(3k-8)}, z = \frac{-4k^2+9k-3}{(k-1)(3k-8)} \right)$$

Si $k = 1$ o $k = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

3. $$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(m+n+l) & n+l & l+m \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ m & n+l & l+m \\ x & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ m & n+l & l \\ x & y+z & z \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

4. Las rectas en forma paramétrica son:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 3+m+m\mu \\ z = 2+2\mu \end{cases}$$

Los vectores directores son: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (1, m, 2)$. Para que sean paralelas, $m = 1$. El plano que las contiene tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$, con $A(0, -2, 1) \in r$ y $B(0, 4, 2) \in s$, por lo que resulta:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 7x + y - 6z + 8 = 0$$

5. La recta r está determinada por $A(3, 4, 5)$ y $\vec{u} = (2, 1, 3)$. Un vector normal a la recta s que corta perpendicularmente a r es $\vec{v} = \vec{u} \times \overrightarrow{PA} = (-10, -10, 10) \sim (1, 1, -1)$, y un vector director de s será:

$$\vec{d} = \vec{v} \times \vec{u} = (4, -5, -1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3+4\mu \\ y = -1-5\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

6. a) $\begin{cases} t = x-3 \\ t = y-2 \end{cases} \Rightarrow x - 3 = y - 2 \Rightarrow x - y - 1 = 0.$

Se trata de una recta en el plano.

Teniendo en cuenta la relación fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$, se tiene:

$$\cos t = \frac{x-2}{2};\ \text{sen}\, t = \frac{y+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Circunferencia de centro $C(2, -1)$ y radio $r = 2$.

b) Puntos de corte: $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Los puntos son $A(0, -1)$ y $B(2, 1)$.

7. a) $D = \mathbf{R}$. f es continua y positiva en D.

$$f'(x) = \frac{-2\,\text{sen}\, x \cos x}{[1 + \text{sen}^2 x]^2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{2}$$

El signo de la derivada se da en la tabla:

	$-\pi$ a $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ a 0	0 a $+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$ a $+\pi$
f′	−	+	−	+
f				

Como $f(-\pi) = f(\pi) = f(0) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, significa que estos son los máximos y mínimos absolutos, respectivamente.

b) Punto de tangencia: $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\right)$. Pendiente:

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9} \Rightarrow \text{Ecuación: } y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

8. a) $D = \mathbf{R} - \{1\}$. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \frac{e-1}{0^-} = -\infty$;

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \frac{e-1}{0^+} = +\infty$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x-1} = -e$. La función será continua en $x = 0 \Leftrightarrow a = -e$. Es continua en todo el resto del dominio excepto en $x = 1$, en el que tiene una discontinuidad inevitable con salto infinito.

9. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\int_1^x e^{2t}\, dt} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x-1}}{e^{2x}} = \frac{3}{e^2}$$

10. f es continua en todo su dominio, $D = [-1, +\infty)$.

a) $A = \displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\, dx$; tomando $x + 1 = t^2$ resulta:

$$A = \int_0^2 \frac{t}{t^2+4} \cdot 2t\, dt = \int_0^2 \left(2 - \frac{8}{t^2+4}\right) dt =$$

$$= \left[2t - \text{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^2 = (4 - \pi)\ \text{u}^2$$

b) $$V = \pi\int_{-1}^{3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+5}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{3} \frac{x+1}{(x+5)^2}\, dx =$$

$$= \pi\left(\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x+5} - 4\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+5)^2}\right) =$$

$$= \pi\left[\ln|x+5| + \frac{4}{x+5}\right]_{-1}^{3} = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\ \text{u}^3$$