

# 14 Integral definida

## Propuesta A

- Considera la función  $f(x) = x^2 + 1$  definida en el intervalo  $[-3, 2]$  y la partición  $P$  del mismo formada por los puntos de abscisas  $-3, -2, -1, 0, 1$  y  $2$ .

  - Determina utilizando dicha partición una aproximación por exceso y otra por defecto al área encerrada entre la curva de  $f$  y el eje  $X$ .
  - Obtén el valor exacto del área anterior usando la regla de Barrow.
- Calcula las siguientes integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y señala cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

  - $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$
  - $\int_0^2 (2x - 1) \, dx$
  - $\int_1^e \ln x \, dx$
- Demuestra que  $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ .
- Halla los máximos y mínimos relativos, si es que existen, de la función  $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+2\cos t} \, dt$ .
- Calcula los valores de  $a$  y de  $b$  que hacen continua las siguientes funciones en todo  $\mathbf{R}$  y determina para los valores hallados  $\int_0^5 [f(x) - g(x)] \, dx$ .

  - $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$
  - $g(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
- Calcula las integrales definidas siguientes y justifica si representan un área o no.

  - $\int_0^4 |2x - 4| \, dx$
  - $\int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4} \, dx$
  - $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} \, dx$
- Representa y calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función  $y = 2x - x^2$ .
- La gráfica de la función  $y = \ln x$ , la recta  $y = 1$  y los ejes de coordenadas delimitan un recinto con forma de trapecio mixtilíneo. Determina:

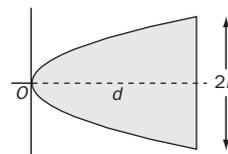
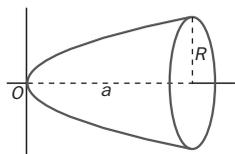
  - El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable  $x$ .
  - El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable  $y$ .
  - El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje  $X$ .
  - El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje  $Y$ .
- Sea el recinto acotado y limitado por la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , las rectas  $x = 1$ ,  $x = -1$  y el eje  $X$ .

  - Determina el área del recinto.
  - Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje  $X$ .
  - Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje  $Y$ .
- Se considera la función  $y = 2\ln x$  definida para valores de  $x \in [1, e]$ . Determina:

  - La longitud del arco de curva.
  - El área del recinto limitado por el arco y su cuerda.

## Propuesta B

1. Sea la función  $y = \frac{2}{x+1}$  definida en el intervalo  $[2, 4]$ , en el que se toma una partición  $P$  dividiéndolo en cuatro partes iguales.
  - a) Obtén el área encerrada por la curva de  $f$  y el eje  $X$  en el intervalo usando la regla de Barrow.
  - b) Determina una aproximación por exceso y otra por defecto al área anterior usando la partición  $P$ .
  
2. Calcula las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y justifica cuáles de ellas representan un área y cuáles no.
  - a)  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$
  - b)  $\int_{-2}^2 (2x+2) \, dx$
  - c)  $\int_{-1}^1 e^{-x} \, dx$
  
3. Determina para qué valores de los parámetros  $a$  y  $b$  la función  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x+9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  es continua en toda la recta real. Para los valores obtenidos calcula  $\int_{-\pi}^6 f(x) \, dx$ .
  
4. Calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \int_0^x t^2 \ln(1+4t^3) \, dt$ .
  
5. Halla la derivada de la función  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sin t} \, dt$ .
  
6. Calcula las siguientes integrales definidas y justifica si representan un área o no.
  - a)  $\int_0^4 |x-4| \, dx$
  - b)  $\int_0^3 \sqrt{x^2-2x+1} \, dx$
  - c)  $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \, dx$
  
7. Representa y calcula el área del recinto limitado por las funciones  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^2 - 4x + 4$ .
  
8. La gráfica de la función  $y = \arctg x$ , la recta  $y = \frac{\pi}{4}$  y el eje  $Y$  delimitan un recinto con forma de triángulo mixtilíneo. Determina:
  - a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable  $x$ .
  - b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable  $y$ .
  - c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje  $Y$ .
  
9. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $X$ , el recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{x \sin x}$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[0, \pi]$ .
  
10.
  - a) Calcula por integración el volumen de un paraboloide de altura  $a$  y radio de la base  $R$ .
  - b) Calcula el área del recinto plano limitado por una parábola y una cuerda de la parábola de longitud  $2L$  perpendicular a su eje y a una distancia  $d$  del vértice.



Soluciones propuesta A

1. a)  $S = 1 \cdot (f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2)) = 10 + 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

$s = 1 \cdot (f(-2) + f(-1) + f(0) + f(0) + f(1)) = 11$

b)  $A = \int_{-3}^2 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-3}^2 = \frac{50}{3} u^2$

2. a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0$

b)  $\int_0^2 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_0^2 = 4 - 2 = 2$

c)  $\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (-1) = 1$

Solamente en el caso c la integral representa un área porque en los otros casos la función no es positiva en todo el intervalo de integración.

3. El máximo de  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$  es  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

Por tanto,  $f(x) \leq \frac{3}{2}$  en  $(0, 1) \Rightarrow$

$\frac{1}{f(x)} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx \geq \int_0^1 \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3}$

4. Por el teorema fundamental del cálculo, será  $F'(x) = \frac{1}{1+2\cos x} \neq 0$  para cualquier valor de  $x$ , por lo que  $F$  no tiene extremos relativos.

5. a)  $f(1) = a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + b) = 9 + b$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (4x + 1) = 13 = 9 + b \Rightarrow b = 4$

Así,  $\int_0^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^3 (x - 3 - x^2) dx + \int_3^5 (-3x) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^3 + \left[ -\frac{3x^2}{2} \right]_3^5 = -\frac{75}{2}$

6. a)  $\int_0^4 |2x - 4| dx = \int_0^2 (-2x + 4) dx + \int_2^4 (2x - 4) dx = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^4 = 4 - (-4) = 8$

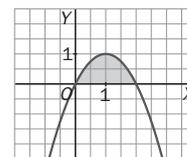
b)  $\int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx = \int_0^4 \sqrt{(x-2)^2} dx = \int_0^2 |x-2| dx + \int_2^4 (x-2) dx = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = 2 + (0+2) = 4$

c)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| dx =$

$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(0+1) = 2$

Todas representan un área: las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. La parábola corta al eje de abscisas en los puntos  $x = 0$  y  $x = 2$ , y es continua y positiva en este intervalo.

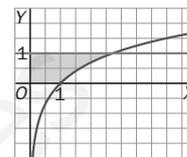


Por tanto:

$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$

8. a)  $A = 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx =$

$= 1 + [x(2 - \ln x)]_1^e = 1 + (e - 2) = e - 1 u^2$



b)  $A = \int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = e - 1 u^2$

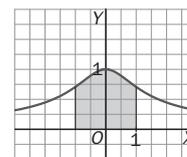
c)  $V = \pi \int_0^e t^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi e - \pi [x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)]_1^e = 2\pi u^3$

d)  $V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} [e^{2y}]_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} u^3$

9. a)  $A = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Se toma:  $x = \operatorname{tg} t$

$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec t (\sec t + \operatorname{tg} t)}{\sec t + \operatorname{tg} t} dt = 2 [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(\ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 1) = 2(\ln(\sqrt{2} + 1))$



b)  $V = \pi \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi [\arctg x]_{-1}^1 = \pi \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2} u^3$

c) Se despeja  $x$  en función de  $y$ :  $x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1^2 dy + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left( \frac{1}{y^2} - 1 \right) dy = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi \left[ -\frac{1}{y} - y \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1) u^3$

10. a)  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx =$

$= \int_1^e \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$ . Con el cambio  $x^2 + 1 = t^2$

se llega a  $L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{t^2}{t^2-1} dt \approx 2,0035$ .

## Soluciones propuesta B

1. a)  $A = \int_2^4 \frac{2dx}{x+1} = 2[\ln|x+1|]_2^4 = 2\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1,02$

b)  $S = \frac{1}{4} \left( f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) \right) = \frac{275}{504}$

$s = \frac{1}{4} \left( f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right) = \frac{1207}{2520}$

$S \approx 0,55; s \approx 0,479$

2. a)  $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$

b)  $\int_{-2}^2 (2x+2) dx = [x^2+2x]_{-2}^2 = 8$

c)  $\int_{-1}^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$

La a y la c representan un área porque las dos funciones son positivas en el intervalo de integración, mientras que la b no.

3. a) Para que  $f$  sea continua en toda la recta real, debe ser continua en  $x = 0$  y en  $x = 3$ ;

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) = b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$

$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax) = 9 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 9) = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1$

b)  $\int_{-\pi}^6 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^3 (x^2 + x) dx + \int_3^6 (x+9) dx = [-\cos x]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 + \left[ \frac{x^2}{2} + 9x \right]_3^6 = -2 + 9 + \frac{9}{2} + \left( 72 - \frac{9}{2} - 27 \right) = 52$

4. Llamando  $F(x) = \int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt$ , hay que

calcular  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^3)}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{10x(1+4x^3)} = \frac{4}{5}$

Se han aplicado la regla de L'Hôpital dos veces y el teorema fundamental del cálculo.

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta que los límites de integración son funciones de  $x$ ,

$F'(x) = \frac{1}{\sin x^2} \cdot 2x - \frac{1}{\sin x} \cdot 1 = \frac{2x}{\sin x^2} - \frac{1}{\sin x}$

6. a)  $\int_0^4 |x-4| dx = \int_0^4 (4-x) dx = \left[ 4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8$

b)  $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx = \int_0^3 |x-1| dx =$

$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

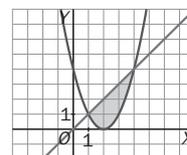
c)  $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 x} dx = \int_0^\pi |\cos x| dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 1 + 1 = 2$

Las tres representan un área porque las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. Se hallan los puntos de corte entre  $f$  y  $g$ :  $f(x) = g(x) \Rightarrow (1, 1), (4, 4)$

Al ser  $g > f$  en  $[1, 4]$ , el área buscada es:



$A = \int_1^4 [x - (x^2 - 4x + 4)] dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 \approx 4,83 \text{ u}^2$

8. a)  $A = \int_0^1 \left( \frac{\pi}{4} - \arctg x \right) dx = \left[ \frac{\pi}{4}x - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \approx 0,35 \text{ u}^2$

b)  $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg } y dy = [-\ln(\cos y)]_0^{\frac{\pi}{4}} \approx 0,35 \text{ u}^2$

c)  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 y dy = \pi [\text{tg } y - y]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ u}^3$

9.  $V = \pi \int_0^\pi (x \sin x) dx = \pi [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = \pi^2 \text{ u}^3$

10. a) De acuerdo a la figura, la parábola que engendra el paraboloides es  $y^2 = 2px$ . Al pasar por  $P(a, R) \Rightarrow 2p = \frac{R^2}{a} \Rightarrow y^2 = \frac{R^2}{a} x$

$V = \pi \int_0^a \left( \frac{R^2}{a} x \right) dx = \frac{\pi R^2}{a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{\pi R^2 a}{2}$

- b) En este caso la parábola es:

$y^2 = \frac{L^2}{d} x \Rightarrow y = \pm \frac{L}{\sqrt{d}} \sqrt{x}$  y el área:

$A = 2 \int_0^d \left( \frac{L}{\sqrt{d}} \sqrt{x} \right) dx = \frac{2L}{\sqrt{d}} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^d = \frac{4}{3} Ld$