14 Integral definida

Propuesta A

1. Considera la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo [–3, 2] y la partición P del mismo formada por los puntos de abscisas –3, –2, –1, 0, 1 y 2.

a) Determina utilizando dicha partición una aproximación por exceso y otra por defecto al área encerrada entre la curva de f y el eje X.

b) Obtén el valor exacto del área anterior usando la regla de Barrow.

2. Calcula las siguientes integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y señala cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ b) $\int_0^2 (2x-1)\, dx$ c) $\int_1^e \ln x\, dx$

3. Demuestra que $\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

4. Halla los máximos y mínimos relativos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+2\cos t}\, dt$.

5. Calcula los valores de a y de b que hacen continua las siguientes funciones en todo **R** y determina para los valores hallados $\int_0^5 [f(x) - g(x)]\, dx$.

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x < 3 \\ 4x+1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

6. Calcula las integrales definidas siguientes y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |2x-4|\, dx$ b) $\int_0^4 \sqrt{x^2-4x+4}\, dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\, dx$

7. Representa y calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

8. La gráfica de la función $y = \ln x$, la recta $y = 1$ y los ejes de coordenadas delimitan un recinto con forma de trapecio mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable x.

b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable y.

c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje X.

d) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje Y.

9. Sea el recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, las rectas $x = 1$, $x = -1$ y el eje X.

a) Determina el área del recinto.

b) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje X.

c) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje Y.

10. Se considera la función $y = 2\ln x$ definida para valores de $x \in [1, e]$. Determina:

a) La longitud del arco de curva.

b) El área del recinto limitado por el arco y su cuerda.

Propuesta B

1. Sea la función $y = \dfrac{2}{x+1}$ definida en el intervalo [2, 4], en el que se toma una partición *P* dividiéndolo en cuatro partes iguales.

a) Obtén el área encerrada por la curva de *f* y el eje *X* en el intervalo usando la regla de Barrow.

b) Determina una aproximación por exceso y otra por defecto al área anterior usando la partición *P*.

2. Calcula las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y justifica cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ b) $\int_{-2}^{2} (2x+2)\, dx$ c) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx$

3. Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ x + 9 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real. Para los valores obtenidos calcula $\int_{-\pi}^{6} f(x)\, dx$.

4. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^5} \int_0^x t^2 \ln(1+4t^3)\, dt$.

5. Halla la derivada de la función $F(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$.

6. Calcula las siguientes integrales definidas y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |x-4|\, dx$ b) $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$ c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

7. Representa y calcula el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

8. La gráfica de la función *y* = arctg *x*, la recta $y = \dfrac{\pi}{4}$ y el eje *Y* delimitan un recinto con forma de triángulo mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable *x*.

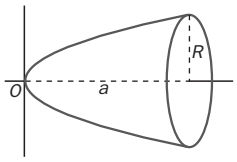
b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable *y*.

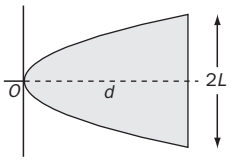
c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

9. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje *X*, el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$ y el eje de abscisas en el intervalo [0, π].

10. a) Calcula por integración el volumen de un paraboloide de altura *a* y radio de la base *R*.

b) Calcula el área del recinto plano limitado por una parábola y una cuerda de la parábola de longitud 2*L* perpendicular a su eje y a una distancia *d* del vértice.





Soluciones propuesta A

1. a) $S = 1\cdot(f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)) =$
$= 10 + 5 + 2 + 2 + 5 = 24$

$s = 1\cdot(f(-2)+f(-1)+f(0)+f(0)+f(1)) = 11$

b) $A = \int_{-3}^{2}(x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{2} = \frac{50}{3}$ u^2

2. a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_{-\pi}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}(-\pi) = 0$

b) $\int_0^2(2x-1)dx = \left[x^2-x\right]_0^2 = 4-2 = 2$

c) $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = (e\cdot\ln e - e)-(-1) = 1$

Solamente en el caso c la integral representa un área porque en los otros casos la función no es positiva en todo el intervalo de integración.

3. El máximo de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ es $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Por tanto, $f(x)\le\frac{3}{2}$ en (0, 1) $\Rightarrow$

$\frac{1}{f(x)}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx\ge\int_0^1\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}$

4. Por el teorema fundamental del cálculo, será $F'(x)=\frac{1}{1+2\cos x}\ne 0$ para cualquier valor de x, por lo que F no tiene extremos relativos.

5. a) $f(1)=a=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

b) $\lim_{x\to3^-}g(x)=\lim_{x\to3}(x^2+b)=9+b$

$\lim_{x\to3^+}g(x)=\lim_{x\to3}(4x+1)=13=9+b\Rightarrow b=4$

Así, $\int_0^5[f(x)-g(x)]dx=\int_1^3(x-3-x^2)dx+\int_3^5(-3x)dx=$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^3+\left[\frac{-3x^2}{2}\right]_3^5=-\frac{75}{2}$

6. a) $\int_0^4|2x-4|dx=\int_0^2(-2x+4)dx+\int_2^4(2x-4)dx=$

$=\left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^4=4-(-4)=8$

b) $\int_0^4\sqrt{x^2-4x+4}\,dx=\int_0^4\sqrt{(x-2)^2}\,dx=$

$=\int_0^4|x-2|dx=\int_0^2(2-x)dx+\int_2^4(x-2)dx=$

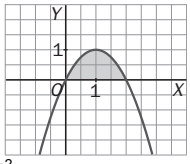
$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4=2+(0+2)=4$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\operatorname{sen} x|dx=$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} x\,dx=2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2(0+1)=2$

Todas representan un área: las funciones son positivas en el intervalo de integración.

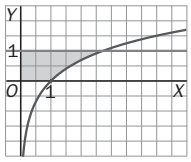
7. La parábola corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y es continua y positiva en este intervalo.



Por tanto:

$A=\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}$ u^2

8. a) $A=1+\int_1^e(1-\ln x)dx=$



$=1+[x(2-\ln x)]_1^e=$

$=1+(e-2)=e-1$ u^2

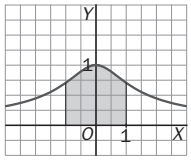
b) $A=\int_0^1e^y dy=\left[e^y\right]_0^1=e-1$ u^2

c) $V=\pi\int_0^e 1^2dx-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx=$

$=\pi e-\pi\left[x(\ln^2 x-2\ln x+2\right]_1^e=2\pi$ u^3

d) $V=\pi\int_0^1\left(e^y\right)^2dy=\frac{\pi}{2}\left[e^{2y}\right]_0^1=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$ u^3

9. a) $A=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$



Se toma: $x=\operatorname{tg} t$

$A=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,dt=$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec t(\sec t+\operatorname{tg} t)}{\sec t+tg\,t}dt=2[\ln(\sec t+\operatorname{tg} t)]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=2(\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1)=2\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

b) $V=\pi\int_{-1}^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx=\pi\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=$

$=\pi[\operatorname{arctg} x]_{-1}^1=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}$ u^3

c) Se despeja x en función de y: $x=\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}1^2dy+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(\frac{1}{y^2}-1\right)dy=$

$=\pi\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi\left[-\frac{1}{y}-y\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$ u^3

10. a) $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=$

$=\int_1^e\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$. Con el cambio $x^2+1=t^2$

se llega a $L=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\frac{t^2}{t^2-1}dt\approx 2{,}0035$.

Soluciones propuesta B

1. a) $A=\int_2^4 \frac{2dx}{x+1}=2[\ln|x+1|]_2^4=2\ln\left(\frac{5}{3}\right)\approx 1{,}02$

b) $S=\frac{1}{4}\left(f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)\right)=\frac{275}{504}$

$s=\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)+f(4)\right)=\frac{1207}{2520}$

$S\approx 0{,}55;\ \ s\approx 0{,}479$

2. a) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2$

b) $\int_{-2}^{2}(2x+2)dx=\left[x^2+2x\right]_{-2}^{2}=8$

c) $\int_{-1}^{1}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

La a y la c representan un área porque las dos funciones son positivas en el intervalo de integración, mientras que la b no.

3. a) Para que *f* sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x=0$ y en $x=3$;

$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}0=0\\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b=0\end{cases}\Rightarrow b=0$

$f(3)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2+ax)=9+3a\\ \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x+9)=12\end{cases}\Rightarrow a=1$

b) $\int_{-\pi}^{6}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^3(x^2+x)dx+$

$+\int_3^6(x+9)dx=[-\cos x]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3+$

$+\left[\frac{x^2}{2}+9x\right]_3^6=-2+9+\frac{9}{2}+\left(72-\frac{9}{2}-27\right)=52$

4. Llamando $F(x)=\int_0^x t^2\ln(1+4t^2)dt$, hay que calcular $L=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=$

$=\lim_{x\to o}\frac{x^2\ln(1+4x^3)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{10x(1+4x^3)}=\frac{4}{5}$

Se han aplicado la regla de L'Hôpital dos veces y el teorema fundamental del cálculo.

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta que los límites de integración son funciones de *x*,

$F'(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}x^2}\cdot 2x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot 1=\frac{2x}{\operatorname{sen}x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}$

6. a) $\int_0^4|x-4|dx=\int_0^4(4-x)dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8$

b) $\int_0^3\sqrt{x^2-2x+1}\,dx=\int_0^3|x-1|dx=$

$=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^3(x-1)dx=$

$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

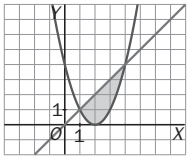
c) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=[\operatorname{sen}x]_0^{\frac{\pi}{2}}+$

$+[-\operatorname{sen}x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2$

Las tres representan un área porque las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. Se hallan los puntos de corte entre *f* y *g:* $f(x)=g(x)\Rightarrow(1,1),(4,4)$



Al ser $g>f$ en [1, 4], el área buscada es:

$A=\int_1^4\left[x-\left(x^2-4x+4\right)\right]dx=$

$=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx=$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4\approx 4{,}83\ \text{u}^2$

8. a) $A=\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x\right)dx=$

$=\left[\frac{\pi}{4}x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}y\,dy=[-\ln(\cos y)]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

c) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2y\,dy=\pi[\operatorname{tg}y-y]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\text{u}^3$

9. $V=\pi\int_0^{\pi}(x\operatorname{sen}x)dx=\pi[-x\cos x+\operatorname{sen}x]_0^{\pi}=\pi^2\ \text{u}^3$

10. a) De acuerdo a la figura, la parábola que engendra el paraboloide es $y^2=2px$. Al pasar por $P(a, R)\Rightarrow 2p=\frac{R^2}{a}\Rightarrow y^2=\frac{R^2}{a}x$

$V=\pi\int_0^a\left(\frac{R^2}{a}x\right)dx=\frac{\pi R^2}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{\pi R^2a}{2}$

b) En este caso la parábola es:

$y^2=\frac{L^2}{d}x\Rightarrow y=\pm\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}$ y el área:

$A=2\int_0^d\left(\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}\right)dx=\frac{2L}{\sqrt{d}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^d=\frac{4}{3}Ld$