14 Integral definida

CRITERIOS DE EVALUACIÓN | **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Hallar la suma de Riemann en un intervalo $[a, b]$ de una función lineal.

1. Obtén las sumas de Riemann para la función $\frac{1}{2}x$ en el intervalo $[2, 6]$ tomando los extremos inferiores de los intervalos (suma inferior) y tomando los extremos superiores (suma superior). Halla el límite de esas sumas cuando $n \to \infty$.

B. Obtener sumas de Riemann de otras funciones y calcular su límite cuando $n \to \infty$.

2. La siguiente tabla corresponde a una función continua definida en el intervalo $[3, 7]$. Calcula $\sum_{1}^{8} f(x_i) \cdot c_i$.

x_i	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
y_i	1	1,8	2	2,4	2,5	3	3,2	3,5

C. Resolver integrales definidas de funciones de las que se obtenga una primitiva de forma inmediata.

3. Calcula las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

a) $\int_{1}^{5} (2x+1)\,dx$ b) $\int_{-1}^{3} \frac{2}{x+2}\,dx$ c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ d) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$

D. Resolver integrales definidas en las que haya que utilizar la propiedad de aditividad del intervalo.

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{k}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $[-2, e]$.

b) Halla $\int_{-2}^{e} f(x)\,dx$.

E. Derivar funciones integrales de la forma $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

5. Halla la función derivada de las funciones integrales:

a) $F(x) = \int_{2}^{x} (t^2 + 4t + 5)\,dt$ b) $G(x) = \int_{x}^{5} \ln t\,dt$ c) $H(x) = \int_{2x}^{x^2+3} \sqrt{t}\,dt$

6. Halla el valor máximo y el mínimo de la función $F(x) = \int_{0}^{x} (t^2 - 4t + 3)\,dt$ en el intervalo $[0, 5]$.

F. Calcular el área del recinto limitado por una curva y el eje de abscisas, o por dos curvas.

7. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ y el eje de abscisas.

8. Las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\, 2x$, $y = \cos x$ se cortan en infinitos puntos y delimitan distintos recintos. Calcula el área de dos recintos que tengan áreas diferentes.

G. Hallar el volumen de un cuerpo de revolución.

9. Calcula, mediante integración, el volumen del cuerpo de revolución que se genera al girar alrededor del eje mayor una elipse de semiejes a y b. ¿Cuál sería el volumen si la elipse girara alrededor del eje menor?

10. El recinto limitado por las funciones $f(x) = 2\sqrt[4]{x}$ y $g(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x-7}$ y el eje de abscisas gira alrededor de este eje y genera un cuerpo de revolución. Representa el recinto y calcula el volumen del cuerpo.

H. Calcular longitudes de arcos.

11. Se considera el arco de la curva correspondiente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ en el intervalo $[1, 4]$. ¿Qué longitud tiene?

12. Halla la longitud del arco de curva correspondiente a la gráfica de la función $y = e^x$ en el intervalo $[0, \ln 3]$.

I. Resolver, mediante integral definida, problemas relacionados con otras ciencias, en especial con la Física.

13. Un resorte elástico situado en un plano horizontal tiene un extremo fijo a una pared. Se tira del extremo libre hasta alargarlo 10 cm. Halla el trabajo que realiza el muelle cuando su extremo libre pasa desde los 10 cm hasta los 5 cm respecto de la posición de equilibrio. La constante elástica del muelle es $k = 2000$ N m^{-1}.

Soluciones

1. Se divide el intervalo [2, 6] en n intervalos iguales de amplitud $\frac{4}{n}$ mediante la partición:

$$\left\{2,\ 2+\frac{4}{n},\ 2+2\left(\frac{4}{n}\right),\ 2+3\left(\frac{4}{n}\right),\ \ldots,\ 2+(n-1)\left(\frac{4}{n}\right),\ 6\right\}$$

$$\sum_1^n f(x_i)\cdot c_i = \frac{4}{n}\left[1+1+\frac{2}{n}+1+\frac{4}{n}+\ldots+1+\frac{2(n-1)}{n}\right]=$$

$$=\frac{4}{n}\left[(1+1+1+\ldots+1)+\frac{2+4+6+\ldots+2(n-1)}{n}\right]=$$

$$=\frac{4}{n}\left[n+\frac{\frac{2+2(n-1)}{2}(n-1)}{n}\right]=\frac{4}{n}(n+n-1)=\frac{8n-4}{n}$$

Con los extremos superiores es análogo y se obtiene $\frac{8n+4}{n}$. En ambos casos el límite es igual:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n-4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+4}{n}\right)=8$$

2. Todos los intervalos tienen amplitud $c_i = 0{,}5$.

$$\sum_1^8 f(x_i)\cdot c_i = 0{,}5(1+1{,}8+\ldots+3+3{,}2+3{,}5)=19{,}4$$

3. a) $\displaystyle\int_1^5 (2x+1)\,dx = [x^2+x]_1^5 = (25+5)-(1+1)=28$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{2}{x+2}\,dx = [2\ln|x+2|]_{-1}^3 = (2\ln 5 - 2\ln 1) = 2\ln 5$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen} 0 = 1$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = (-e^{-1})-(-e^1) = e-\frac{1}{e}$

4. a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = \frac{k}{1} \Rightarrow k=3$

b) $\displaystyle\int_{-2}^e f(x)\,dx = \int_{-2}^1 (4-x^2)\,dx + \int_1^e \frac{3}{x}\,dx =$

$$=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1 + [3\ln x]_1^e = 9+3 = 12$$

5. a) $F'(x) = x^2+4x+5$

b) $\displaystyle G(x) = \int_x^5 \ln t\,dt = -\int_5^x \ln t\,dt \Rightarrow G'(x) = -\ln x$

c) $\displaystyle H(x) = \int_{2x}^{x^2+3}\sqrt{t}\,dt = \int_{2x}^0 \sqrt{t}\,dt + \int_0^{x^2+3}\sqrt{t}\,dt =$

$$= -\int_0^{2x}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{x^2+3}\sqrt{t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H'(x) = 2\sqrt{2x}+2x\sqrt{x^2+3}$$

6. $F'(x) = x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Se anula para $x=1$ y para $x=3$.

Se halla $F(0)=0$, $\displaystyle F(1)=\int_0^1 (t^2-4t+3)\,dt = \frac{4}{3}$,

$\displaystyle F(3)=\int_0^3 (t^2-4t+3)\,dt = 0$, $F(5) = \frac{20}{3}$

Máximo: $\frac{20}{3}$; mínimo: 0.

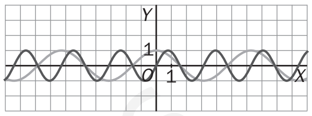
7. Raíces: $0 = x^3-4x^2-x+4 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=4 \end{cases}$

Signo: -1 ⊕ 1 ⊖ 4

$$S=\int_{-1}^1 (x^3-4x^2-x+4)\,dx + \int_1^4 (-x^3+4x^2+x-4)\,dx =$$

$$=\frac{253}{12}$$

8. Puntos de intersección:



$$\operatorname{sen} 2x = \cos x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{2}$$

$$S_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \operatorname{sen} 2x)\,dx = \left[\operatorname{sen} x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4}$$

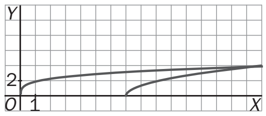
$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2x - \cos x)\,dx = \left[-\operatorname{sen} x - \frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

9. $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$V = 2\pi\int_0^a y^2\,dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

$$V_2 = 2\pi\int_0^b x^2\,dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

10. Punto de corte (16, 4).



$$V = \pi\left(\int_0^{16} 4\sqrt{x}\,dx - \int_7^{16}\frac{16}{9}(x-7)\,dx\right) = \frac{296}{3}\pi$$

11. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x-1}$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}\text{ u}$$

12. $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$ $\qquad \displaystyle L = \int_0^{\ln 3}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Con el cambio de variable:

$$1+e^{2x} = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t}{t^2-1}dt,\ \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\ln 3 \Rightarrow t=\sqrt{10} \end{cases}$$

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \left[t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} =$$

$$=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right]$$

13. $\displaystyle dW = F\cdot dx \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\cdot dx$

$$W = \int_{0{,}10}^{0{,}05} (-2000x)\,dx = [-1000x^2]_{0{,}10}^{0{,}05} = 7{,}5\text{ J}$$