13 Cálculo de primitivas

Propuesta A

1. De todas las funciones primitivas de $f(x)=15x^2-2$, escribe la expresión algebraica de la que pasa por el punto $P(-2,-23)$.

2. La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3,\ 17)$ y su derivada segunda es $f''(x)=6x+6$. Determina de qué función se trata y halla las coordenadas del punto de inflexión y del mínimo relativo de la misma. ¿En qué punto corta la gráfica de la función al eje de ordenadas?

3. En un determinado movimiento se sabe que la aceleración es constante $a = -10\ ms^{-2}$ y que a los 2 s el móvil se encuentra en una posición $s(2) = 25$ m y lleva una velocidad de 15 m/s. Determina:

a) La expresión de la velocidad en cualquier instante.

b) La velocidad inicial.

c) La expresión de la posición en cualquier instante.

d) La posición inicial.

e) La posición y la velocidad a los 4 segundos.

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6}{x+1}\,dx$ c) $\int \frac{\cos x}{3+\operatorname{sen} x}\,dx$ e) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2\right)dx$ d) $\int x\cdot e^{x^2+2}dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

5. Resuelve aplicando el método de integración por partes las integrales:

a) $\int \cos^2 x\ dx$ b) $\int (\ln x)^3\,dx$ c) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

6. Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$ b) $\int \frac{2x-1}{x+2}\,dx$ c) $\int \frac{2x+2}{(x-1)^2}\,dx$

7. Calcula las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx$ b) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}\,dx$ c) $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,dx$

8. Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

a) $\int \frac{2x^3}{1+x^2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ c) $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

9. Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ b) $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$ c) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

10. Calcula las integrales:

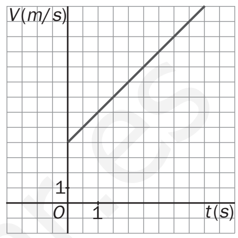
a) $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ b) $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x\ dx$ c) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

Propuesta B

1. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ y que pasa por el punto $Q\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.

2. La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(1, 0)$. Halla la función y calcula $f(0)$.

3. En un determinado movimiento rectilíneo la velocidad en función del tiempo viene dada por la gráfica de la derecha. Además se sabe que para $t = 4$ s, el móvil se encuentra en la posición $s(4) = 50$ m. Determina:



a) La velocidad inicial.

b) La expresión de la velocidad en cualquier instante.

c) La expresión de la posición en cualquier instante.

d) La posición inicial.

e) La aceleración.

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(10x + \sqrt{x}\right) dx$

b) $\int \left(x^2 + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} dx$

d) $\int e^x (e^x + 2)^4 dx$

e) $\int \frac{5 \ln x}{x} dx$

f) $\int \frac{2x+5}{x^2+1} dx$

5. Resuelve aplicando el método de integración por partes a las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{arctg} 2x \, dx$

b) $\int (x+1) e^x \, dx$

c) $\int \ln x^2 \, dx$

6. Resuelve por descomposición en fracciones simples las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

b) $\int \frac{2x+1}{x+4} dx$

c) $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} dx$

7. Calcula las integrales de las funciones racionales:

a) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+8} dx$

b) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9} dx$

c) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+10} dx$

8. Calcula las integrales de las funciones racionales con raíces complejas en el denominador:

a) $\int \frac{2x^2}{4+x^2} dx$

b) $\int \frac{x}{x^2-2x+5} dx$

c) $\int \frac{4x^2-x+3}{x^3-x^2+x-1} dx$

9. Calcula las integrales de las funciones trigonométricas:

a) $\int \operatorname{sen} 3x \cos(2x-5) \, dx$

b) $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx$

c) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^5 x} dx$

10. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$

b) $\int \frac{3^x}{3^{2x}-1} dx$

c) $\int x\sqrt{2x+1} \, dx$

Soluciones propuesta A

1. $F(x)=\int\left(15x^2-2\right)dx=5x^3-2x+C$

$F(-2)=5\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+C=-23\Rightarrow$

$\Rightarrow C=13\Rightarrow F(x)=5x^3-2x+13$

2. $f''(x)=6x+6\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x+C$. Como hay un máximo relativo en $x=-3$, entonces $f'(-3)=0\ \Rightarrow C=-9$ y es $f'(x)=3x^2+6x-9$.

$f(x)=x^3+3x^2-9x+K$ y como $f(-3)=17\Rightarrow$

$\Rightarrow K=-10\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2-9x-10$.

Inflexión: $6x+6=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow I(-1,1)$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3,\ \text{máximo}(-3,17)\\ x_2=1,\ \text{mínimo}(1,-15)\end{cases}$

Punto de corte con el eje Y: $P(0,-10)$

3. $v=\int a\,dt=\int -10\,dt=-10t+C$,

$v(2)=15\Rightarrow C=35$

$s=\int v dt=\int(-10t+35)dt=-5t^2+35t+k$

$s(2)=25\Rightarrow -20+70+K=25\Rightarrow K=-25$

a) $v(t)=-10t+35$ m/s

b) $v_0=v(0)=35$ m/s

c) $s(t)=-5t^2+35t-25$ m

d) $s_0=s(0)=-25$ m

e) $s(4)=35$ m, $v(4)=-5$ m/s

4. a) $I=6\ln|x+1|+C$

b) $I=-\frac{1}{x}+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+K$

c) $I=\ln|3+\operatorname{sen}x|+K$

d) $I=\frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2+2}dx=\frac{1}{2}e^{x_2+2}+C$

e) $I=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$

f) $I=\sqrt{x^2+1^2}+C$

5. a) $I=\operatorname{sen}x\cos x+\int\operatorname{sen}^2x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+$

$+\int(1-\cos^2x)dx=\operatorname{sen}x\cos x+x-I\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\frac{x+\operatorname{sen}x\cos x}{2}+C$

b) $I=x(\ln x)^3-\int 3(\ln x)^2dx$

$=x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+\int 6\ln x\,dx=$

$=x\left[(\ln x)^3-3(\ln x)^2+6\ln x+6\right]+C$

c) $I=-x\operatorname{cotg}x+\int\operatorname{cotg}x\,dx=$

$=-x\operatorname{cotg}x+\ln|\operatorname{sen}x|+C$

6. a) $I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

b) $I=\int\left(2-\frac{5}{x+2}\right)dx=2x-5\ln|x+2|+C$

c) $I=\int\frac{2x+2}{(x-1)^2}dx=\int\frac{2x-2+4}{(x-1)^2}dx=$

$=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx=2\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$

7. a) $\int\frac{x-1}{x^2+4x+3}dx=\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=2\ln|x+3|-\ln|x+1|+C$

b) $I=\int\frac{x+2-3}{(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right)dx=$

$=\ln|x+2|+3(x+2)^{-1}+C$

c) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4-6}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx-$

$-\int\frac{3}{1+(x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-$

$-3\operatorname{arctg}(x+2)+C$

8. a) $I=\int\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=x^2-\ln(x^2+1)+C$

b) $I=\int\frac{1}{4+(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

c) $I=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$

$=3\ln|x-1|+4\operatorname{arctg}x+C$

9. a) $I=\int\left[(1+\operatorname{tg}^2x)-1\right]dx=\operatorname{tg}x-x+C$

b) $I=\int\frac{(1+\operatorname{sen}x)^2}{1-\operatorname{sen}^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^2x}+\right.$

$\left.+\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\right)dx=2\operatorname{tg}x+2\sec x-x+C$

c) $I=\int\operatorname{sen}^{-2}x\cos x\,dx=-\operatorname{cosec}x+C$

10. a) Si $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$I=\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=t+C=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $I=\frac{1}{4}\int(2\operatorname{sen}x\cos x)^2dx=\frac{1}{4}\int\operatorname{sen}^2 2x\,dx=$

$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen}4x}{4}\right)+C$

c) $I=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx==\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=$

$=x-\ln\left(1+e^x\right)+C$

Soluciones propuesta B

1. $F(x)=\int(\text{sen}\,x+\cos x)\,dx=-\cos x+\text{sen}\,x+C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\text{sen}\frac{\pi}{2}+C=1+C=-2 \Rightarrow$

$C=-3\Rightarrow F(x)=-\cos x+\text{sen}\,x-3$

2. La función es $f(x)=2x^3-2x^2+5x+K$ porque su derivada es $f'(x)=6x^2-4x+5$. Para hallar la constante *K*, se impone $f(1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow K=-5$.

$f(x)=2x^3-2x^2+5x-5\Rightarrow f(0)=-5$

3. a) De la gráfica: $v_0=v(0)=4$ m/s

b) De la gráfica: $v(t)=2t+4$ m/s

c) $s=\int v\,dt=\int(2t+4)\,dt=t^2+4t+K$

$s(4)=50\Rightarrow 16+16+K=50\Rightarrow K=18$

$s(t)=t^2+4t+18$ m

d) $s_0=s(0)=18$ m

e) $a=v'(t)=2$ m/s^2

4. a) $I=\int(10x+x^{\frac{1}{2}})\,dx=5x^2+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+K$

b) $I=\int(x^2+2x^{\frac{1}{3}})\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+K$

c) $I=\ln|\text{tg}\,x|+K$

d) $I=\frac{1}{5}(e^x+2)^5+K$

e) $I=\frac{5}{2}(\ln x)^2+K$

f) $I=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+1}\right)dx=$

$=\ln(x^2+1)+5\,\text{arctg}\,x+K$

5. a) $I=x\,\text{arctg}\,2x-\int\frac{2x}{1+4x^2}dx=$

$=x\,\text{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C$

b) $I=(x+1)e^x-\int e^x dx=$

$=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$

c) $I=x\ln x^2-\int 2\,dx=x\ln x^2-2x+C$

6. a) $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx=2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}-=$

$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right|+C$

b) $I=\int\left(2-\frac{7}{x+4}\right)dx=2x-7\ln|x+4|+C$

c) $I=\int\frac{x+1+1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$

7. a) $I=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-4}dx=$

$=-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x-4|+C$

b) $I=\int\frac{x-3+2}{(x-3)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}\right)dx=$

$=\ln|x-3|-\frac{2}{x-3}+C$

c) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6+4}{x^2-6x+10}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+\int\frac{2}{1+(x-3)^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+2\,\text{arctg}(x-3)+C$

8. a) $I=\int\left(2+\frac{-8}{4+x^2}\right)dx=2x-4\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2+2}{x^2-2x+5}dx=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\int\frac{1}{4+(x-1)^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x-1}{2}+C$

c) $I=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$=3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

9. a) $I=\int\frac{\text{sen}(5x-5)+\text{sen}(x+5)}{2}dx=$

$=-\frac{\cos(5x-5)}{10}-\frac{\cos(x+5)}{2}+C$

b) $I=\int\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}+\frac{2\cos x}{\text{sen}^2 x}+\right.$

$\left.+\frac{1-\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}\right)=-2(\text{cotg}\,x+\text{cosec}\,x+x)+C$

c) $I=\int\frac{\cos x-\cos x\,\text{sen}^2 x}{\text{sen}^5 x}dx=\int\left(\frac{\cos x}{\text{sen}^5 x}-\frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\right)dx=$

$=-\frac{\text{cosec}^4 x}{4}+\frac{\text{cosec}^2 x}{2}+C$

10. a) Si $t=\text{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y $\text{sen}\,x=\frac{2t}{1+t^2}$

$I=\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{-2}{1+t}+C=\frac{-2}{1+\text{tg}(x/2)}+C$

b) Haciendo $3^x=t,\ 3^x\ln 3\,dx=dt$,

$I=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-1}{3^x+1}\right|+C$

c) Si $2x+1=t^2\Rightarrow 2dx=2tdt$

$I=\frac{t^3(3t^2-5)}{30}+C=\frac{3x-1}{15}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+C$