13 Cálculo de primitivas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Hallar una función de la que se conoce su derivada y un punto de su gráfica.	**1.** La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(2, 25)$. Halla la función y calcula $f(0)$. **2.** La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3, 17)$ y su derivada segunda es $f''(x) = 6x + 6$. Determina de qué función se trata y halla las coordenadas del punto de inflexión y del mínimo relativo de la misma. ¿En qué punto corta la gráfica de la función al eje de ordenadas?
B. Resolver problemas elementales de cinemática por la aplicación del cálculo integral.	**3.** Las expresiones escalares de la velocidad y de la aceleración instantánea en un movimiento rectilíneo son $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$, $a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = s''(t)$. En un determinado movimiento se sabe que la aceleración tiene el valor constante $a = -10$ m/s^2 y que a los 2 s el móvil se encuentra en la posición $s(2) = 48$ m y lleva una velocidad de 12 m s^{-1}. Determina: a) La expresión de la velocidad en cualquier instante. b) La velocidad inicial. c) La expresión de la posición en cualquier instante. d) La posición inicial. e) La posición y la velocidad a los 4 segundos.
C. Resolver por partes las integrales de funciones del tipo: $\ln x$, $\text{arcsen}\, x$, $\text{arctg}\, x$, $P(x) \cdot e^x$, $P(x) \cdot \text{sen}\, x$, etc.	**4.** Resuelve, aplicando el método de integración por partes, las integrales: a) $\int (\ln x)^2\, dx$ b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ **5.** Resuelve las integrales: a) $\int 2x \cdot \text{arctg} x \cdot dx$ b) $\int (3x + 1) \cdot e^x \cdot dx$
D. Resolver, por reiteración del método, integrales de funciones como $\text{sen}\,(ax) \cdot e^{bx}$.	**6.** Halla, utilizando el método de integración por partes, las integrales: a) $\int e^{2x+1} \cdot \cos(x - 2) \cdot dx$ b) $\int \text{sen}^4 x\, dx$
E. Calcular integrales de funciones racionales con raíces reales, simples y múltiples, en el denominador.	**7.** Halla, mediante descomposición simple, la integral $\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x}\right) dx$ **8.** Resuelve las integrales: a) $\int \frac{5}{x^2 - 3x - 4}\, dx$ b) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2}\, dx$
F. Efectuar la descomposición y las integrales de funciones racionales con raíces complejas simples en el denominador.	**9.** Resuelve las integrales con raíces complejas en el denominador: a) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 10}\, dx$ b) $\int \frac{5}{x^4 - 1}\, dx$
G. Efectuar transformaciones sencillas en la función integrando para transformar las integrales en inmediatas.	**10.** Transforma las funciones para convertirlas en integrales inmediatas. a) $\int \frac{1}{1 - \cos x}\, dx$ b) $\int \frac{x - 4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$
H. Resolver integrales, especialmente trigonométricas, por cambio de variable.	**11.** Integra: a) $\int \text{sen}^3 x \cdot dx$ b) $\int \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

Soluciones

1. La función buscada es $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + K$

Para determinar la constante K, se exige que $f(2) = 25$, es decir, $16 - 8 + 10 + K = 25 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f(0) = 7$.

2. $f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + C$. Como hay un máximo relativo en $x = -3$, entonces $f'(-3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -9$ y la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + K$ y como $f(-3) = 17 \Rightarrow K = -10$

Por tanto, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$.

Inflexión: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow I(-1, 1)$

Mínimo:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow \text{máximo } M(-3, 17) \\ x_2 = 1 \Rightarrow \text{mínimo } m(1, -15) \end{cases}$$

Punto de corte con Y: $P(0, -10)$

3. $v = \int a\,dt = \int -10\,dt = -10t + C$, $v(2) = 12 \Rightarrow C = 32$

$$s = \int v\,dt = \int (-10t + 32)\,dt = -5t^2 + 32t + K$$

$s(2) = 48 \Rightarrow -20 + 64 + K = 48 \Rightarrow K = 4$

a) $v(t) = -10t + 32$ m s^{-1} d) $s_0 = s(0) = 4$ m

b) $v_0 = v(0) = 32$ m s^{-1} e) $s(4) = 52$ m, $v(4) = -8$ m s^{-1}

c) $s(t) = -5t^2 + 32t + 4$ m

Se puede interpretar como un lanzamiento vertical desde 4 m de altura con velocidad inicial 32 m s^{-1}. A los 4 s el móvil ya está bajando.

4. a) Tomando $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \dfrac{2}{x}\ln x\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 + 2x(1 - \ln x) + k$$

Ya que la integral de $\ln x$ se hace por partes:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x = -x(1 - \ln x)$$

b) Tomando $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \operatorname{tg} x \end{cases}$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + K$$

5. a) Tomando $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x^2 + 1} \\ dv = 2x\,dx \Rightarrow v = x^2 \end{cases}$

$$\int 2x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2 + (1 - 1)}{x^2 + 1}dx =$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x - \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}dx = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - x + K$$

b) $\int (3x + 1) \cdot e^x \cdot dx = (3x + 1) \cdot e^x - 3\int e^x\,dx =$
$= (3x + 1) \cdot e^x - 3e^x + C = (3x - 2) \cdot e^x + C$

6. a) $I = \int e^{2x+1} \cdot \cos(x - 2) \cdot dx =$

$$= e^{2x+1}\operatorname{sen}(x - 2) + 2e^{2x+1}\cos(x - 2) - 4I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5}e^{2x+1}(\operatorname{sen}(x - 2) + 2\cos(x - 2)) + K$$

b) Tomando $\begin{cases} u = \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow du = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\operatorname{sen}^3 x \cos x + 3\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$$

$$I = -\operatorname{sen}^3 x \cos x + 3\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - 3I \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}\left(-\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x)\right) + K$$

7. $$\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x}\right)dx = \int \left(x - 3 + \frac{5}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ln|x| + K$$

8. a) $\int \dfrac{5}{x^2 - 3x - 4}dx = -\ln|x + 1| + \ln|x - 4| + C$, ya que

$$\frac{5}{x^2 - 3x - 4} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4} \Rightarrow A(x - 4) + B(x + 1) = 5$$

de donde $A = -1$ y $B = 1$.

b) $\int \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2}dx$ se descompone:

$$\int \left[(x + 1) + \frac{3}{x - 3} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 3\ln|x - 3| + \ln|x| + \frac{2}{x} + K$$

9. a) $$\int \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 6 - 4}{x^2 + 6x + 10}dx \overset{y = x + 3}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 10}dx - \int \frac{2dy}{y^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6x + 10) - 2\operatorname{arctg}(x + 3) + K$$

b) $$\int \frac{5}{x^4 - 1}dx = \int \left[\frac{\frac{5}{4}}{x - 1} + \frac{-\frac{5}{4}}{x + 1} + \frac{-\frac{5}{2}}{x^2 + 1}\right]dx =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x - 1| - \frac{5}{4}\ln|x + 1| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x + K$$

10. a) $$\int \frac{1}{1 - \cos x}dx = \int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x + K$$

b) $$\int \frac{x - 4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{24}{7}x^{\frac{7}{6}} + K$$

11. a) $$\int \operatorname{sen}^3 x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx \overset{t = \cos x}{=}$$

$$= \int (1 - t^2) \cdot (-dt) = -t + \frac{1}{3}t^3 + K = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + K$$

b) $$\int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{t = \operatorname{tg} x}{=}$$

$$= \int (1 + 2t^2)\,dt = t + \frac{2}{3}t^3 + K = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + K$$