12 Representación de funciones

Propuesta A

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2}$ b) $g(x)=\ln\left(\operatorname{sen}(2x)\right)$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x)=1+\operatorname{tg}x$ b) $g(x)=\dfrac{2-e^x}{2+e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen}3x$ b) $g(x)=4\cos 2x+\operatorname{sen}3x$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-9}$ b) $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x\cos x}$ c) $h(x)=\ln(x^2-1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^2}$ b) $g(x)=\dfrac{4+e^x}{1-e^x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^3-3x\right)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

7. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y represéntalas.

a) $f(x)=x^4-3x^2-4$ b) $g(x)=3(x-1)-(x-1)^3$

8. Representa las siguientes funciones racionales e irracionales tras realizar el estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+1}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ c) $h(x)=\sqrt{x^2-x-6}$

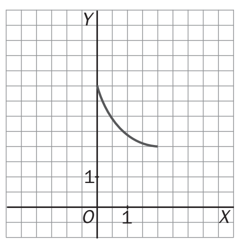
9. Haz un estudio completo y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x+2)e^x$ b) $g(x)=\ln\left(x^2+x-2\right)$

10. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones trigonométricas y represéntalas.

a) $f(x)=\cos^2 x\operatorname{sen}x$ b) $g(x)=\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:



a) $-f(x)$ c) $2+f(x)$ e) $f^{-1}(x)$

b) $2f(x)$ d) $f(x+2)$ f) $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Propuesta B

1. Determina el dominio, los puntos de discontinuidad, los puntos singulares y los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

a) $f(x)=2-\ln(x-1)$ b) $g(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$

3. Determina el período de las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x+\cos x$ b) $g(x)=\left(\dfrac{x}{2}-\operatorname{Ent}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

4. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-5\right|}{x}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-1}$ c) $h(x)=\operatorname{tg}(x^2+1)$

5. Halla las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$ b) $g(x)=\sqrt{x^2-x}$

6. Representa conjuntamente las gráficas de las funciones polinómicas $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(4x^2-x^4\right)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y compara el signo de $f'(x)$ y $f''(x)$ con el crecimiento y la curvatura de $f(x)$.

7. Representa las siguientes funciones polinómicas tras realizar un estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=x^3-3x+2$ b) $g(x)=(x+1)-(x+1)^3$

8. Haz el estudio completo y representa las siguientes funciones racionales e irracionales.

a) $f(x)=\dfrac{x-4}{2x+4}$ b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ c) $h(x)=\sqrt{9-x^2}$

9. Realiza el estudio de las funciones siguientes y represéntalas.

a) $f(x)=(x^2-1)e^x$ b) $g(x)=\ln\left(4-x^2\right)$

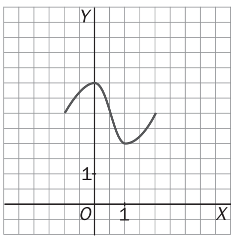
10. Representa las siguientes funciones trigonométricas tras realizar su estudio completo.

a) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$ b) $g(x)=\operatorname{sen}^2 x\cos x$

11. La gráfica de la derecha corresponde a una función $f(x)$. Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

a) $-f(x)$ c) $f(x)-3$ e) $f^{-1}(x)$

b) $\dfrac{f(x)}{2}$ d) $f(x+3)$ f) $f(2x)$



Soluciones propuesta A

1. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$. Es continua en todo D.

$f'(x) = \dfrac{2(3-x)^2}{x^3(x+3)^2} \Rightarrow$ puntos singulares y críticos: $x = \pm\sqrt{3}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, \text{sen}\,2x > 0\} = \left(k\pi,\, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

Continua en $D(f)$. $g'(x) = 2\,\text{cotg}(2x) \Rightarrow$ ptos. singulares y críticos: $x = \dfrac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$

2. a) Eje X: $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Eje Y: (0, 1)

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

b) Eje X: (ln 2, 0). Eje Y: $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

$g(x) > 0$ si $x \in (2, +\infty)$

3. a) $f(x) = \text{sen}\,3x = \text{sen}(3x + 2\pi) = \text{sen}\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

Período $T = \dfrac{2\pi}{3}$

b) $g(x) = 4\cos 2x + \text{sen}\,3x = g_1(x) + g_2(x)$

$T_1 = \pi,\ T_2 = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2) = 2\pi$

4. a) $f(-x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2}{x^2 - 9} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ Ni par ni impar

b) $g(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{-x\cos(-x)} = -g(x) \Rightarrow$ Impar

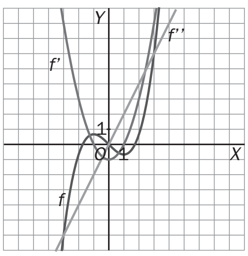
c) $h(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = h(x) \Rightarrow$ Par

5. a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^2} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$. Solo tiene la asíntota oblicua $y = 2x$.

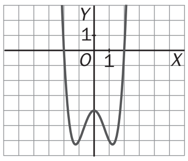
b) Vertical en $x = 0$, al ser $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$.

Horizontales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4+e^x}{1-e^x} = 4 \Rightarrow y = 4 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4+e^x}{1-e^x} = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

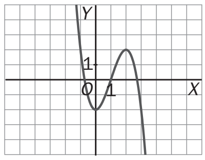
6.



7. a)



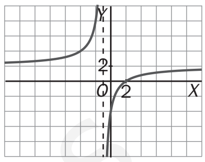
b)



8. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$

Cortes: (2, 0), (0, –4)

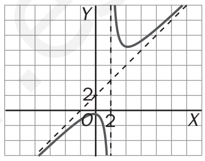
AV: $x = -1$, AH: $y = 2$



b) $D(g) = \mathbf{R} - \{2\}$

Cortes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

AV: $x = 2$, AO: $y = x+2$

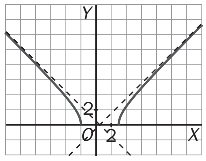


c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Cortes: (–2, 0), (3, 0)

AO: $y = x - \dfrac{1}{2}$, si $x \to +\infty$

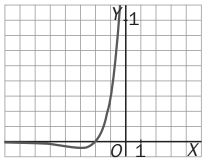
$y = \dfrac{1}{2} - x$, si $x \to -\infty$



9. a) $D(f) = \mathbf{R}$

Cortes: (–2, 0), (0, 2)

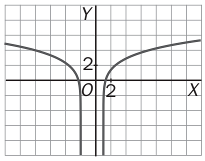
AH: $y = 0$, si $x \to -\infty$



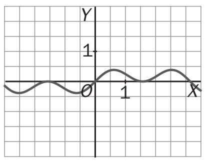
b) $D(g) = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Cortes: no hay

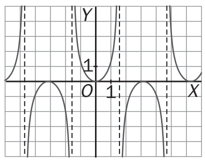
AV: $x = -2$, $x = 1$



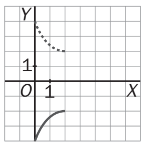
10. a)



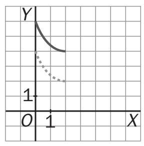
b)



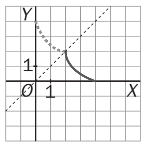
11. a)



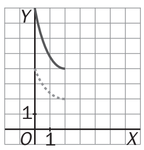
c)



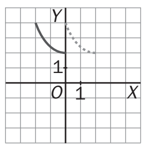
e)



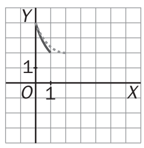
b)



d)



f)



Soluciones propuesta B

1. a) $D(f)=(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$. Continua en $D(f)-\{3\}$. $f'(x)=\dfrac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\neq 0\Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

b) $D(g)=[3,+\infty)$. Continua en $D(g)-\{3\}$.

$g'(x)=\dfrac{5}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)^{-\frac{1}{2}}\neq 0\Rightarrow$ no hay puntos singulares. Tampoco hay críticos.

2. a) Eje X: $\left(1+e^{2},\,0\right)$. Eje Y: no hay.

$f'(x)>0$ si $x\in\left(1,\,1+e^{2}\right)$

b) Eje X: $(-2, 0)$. Eje Y: $(0, 2)$

$g(x) > 0$ si $x\in(2, +\infty)$

3. a) $f(x)=\text{sen}^2\,x+\cos x=f_1(x)+f_2(x)$

$T_1=\pi,\ T_2=2\pi\Rightarrow T=\text{m.c.m}(T_1,\,T_2)=2\pi$

b) $T = 2$ porque

$$h(x+2)=\left(\frac{x+2}{2}-\text{Ent}\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{x}{2}+1-\text{Ent}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-\text{Ent}\left(\frac{x}{2}\right)=h(x)$$

4. a) $f(-x)=\dfrac{\ln\left|x^2-5\right|}{-x}=-f(x)\Rightarrow$ Impar

b) $h(-x)=\dfrac{-x^3-2x}{x^2-1}=-h(x)\Rightarrow$ Impar

c) $h(-x)=\text{tg}((-x)^2+1)=h(x)\Rightarrow$ Par

5. a) Vertical en $x = 0$, ya que

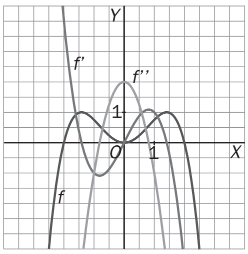
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{2}{x}-3\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2-3x\ln x}{x}\right)=-\infty$$

b) $m_+=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=1,\ m_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=-1$

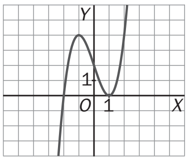
$$n_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x}\mp x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mp x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\mp\frac{1}{2}$$

Asíntotas oblicuas: $\begin{cases} y=x-\dfrac{1}{2} & \text{si } x\to+\infty \\ y=-x+\dfrac{1}{2} & \text{si } x\to-\infty \end{cases}$

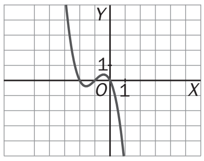
6.



7. a)



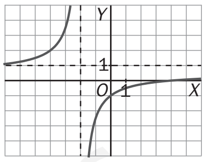
b)



8. a) $D(f)$ = **R** – {–2}

Cortes: (4, 0), (0, –1)

AV: x = –2, AH: $y=\dfrac{1}{2}$

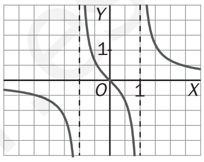


b) $D(g)$ = **R** – {–1, 1}

Cortes: (0, 0)

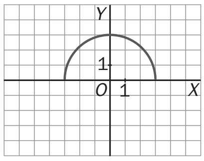
AV: x = –1, x = 1

AH: y = 0



c) $D(h)$ = [–3, 3]

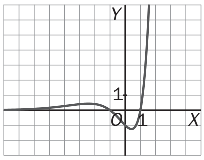
Cortes: (–3, 0), (3, 0), (0, 3)



9. a) $D(f)$ = **R**

Cortes: (–1, 0), (1, 0), (0, –1)

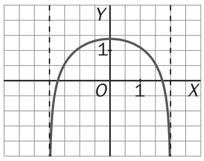
AH: y = 0, si $x\to-\infty$



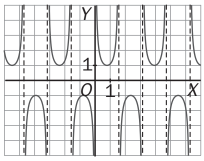
b) $D(g)$ = (–2, 2)

Cortes: (0, ln 4)

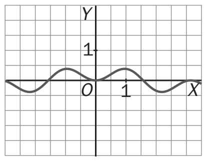
AV: x = –2, x = 2



10. a)

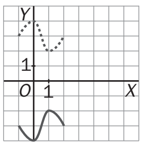


b)

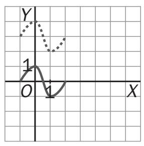


11.

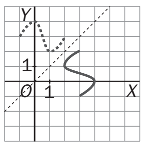
a)



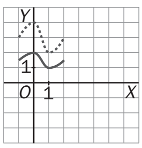
c)



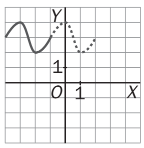
e)



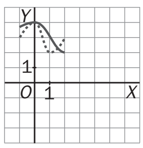
b)



d)



f)



En el apartado e se representa la correspondencia inversa de f al no existir f^{-1}.