

12 Representación de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Calcular el dominio de una función dada por su expresión algebraica, su gráfica o mediante un enunciado, así como su continuidad.

B. Calcular los puntos de corte con los ejes y el signo de una función.

C. Estudiar las simetrías y la posible periodicidad de una función.

D. Calcular la tendencia de una función en el infinito y en las proximidades de puntos aislados en los que no está definida.

E. Calcular las asíntotas de una función.

F. Determinar la monotonía y extremos relativos de una función.

G. Determinar la curvatura y los puntos de inflexión.

H. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, tras hacer un estudio completo de sus características.

I. Representar las gráficas de las funciones: $-f(x)$, $f(x) + k$, $f(x + c)$, $a \cdot f(x)$, $f(k \cdot x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ cuando se conoce la gráfica de la función $f(x)$.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Determina el dominio y la continuidad de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x^3-3x^2} \quad b) g(x) = \sqrt{\frac{-x-2}{x-3}} \quad c) k(x) = \ln(\sin(2x))$$

2. Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones:

$$a) f(x) = 1 + \sin x \quad c) h(x) = 1 - (\ln(3+x))$$

$$b) g(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x} \quad d) k(x) = \frac{e^x}{x}$$

3. Determina la periodicidad de las funciones:

$$a) f(x) = \sin^2 x \quad b) g(x) = 4 \cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)$$

4. Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \ln|x^2 - 5| \quad b) g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad c) h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$$

5. Estudia el comportamiento de las funciones en el infinito y en los puntos de discontinuidad.

$$a) f(x) = \frac{4-x^2}{x^3-2x^2-9x+18} \quad b) g(x) = \ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$$

6. Halla las asíntotas de las funciones:

$$a) g(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x} \quad b) h(x) = \sqrt{x^2+5}$$

7. La función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$ tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$. Determina los coeficientes b y c y estudia su monotonía.

8. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad b) g(x) = \sin x - \cos x$$

9. Efectúa la representación gráfica de las siguientes funciones tras realizar un estudio de las características más importantes de cada una de ellas.

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad c) h(x) = \ln|x^2-5| \quad e) n(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

$$b) g(x) = \frac{3+2x^3}{1-x^2} \quad d) m(x) = \sqrt{x^2+5} \quad f) s(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

10. Teniendo en cuenta la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ representa las siguientes funciones en el mismo intervalo.

$$a) f(x) = 2 \cos x \quad c) f(x) = 3 + \cos x \quad e) f(x) = 1 - \cos x$$

$$b) f(x) = \cos 2x \quad d) f(x) = \cos(x - \pi) \quad f) f(x) = |1 - 2 \cos x|$$

Soluciones

1. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) $D(g) = [-2, 3]$

c) $D(k) = \{x \in \mathbb{R} / \sin(2x) > 0\}$

$$2x \in \{I, II \text{ cuadrantes}\} \Rightarrow D = \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

2. a) $f(x) = 1 + \sin x$ $\begin{cases} Y: (0, 1) \\ X: \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) \end{cases}$

f es siempre positiva excepto en los puntos de corte con el eje X .

b) $g(x) = \frac{2 + e^x}{2 - e^x}$ $\begin{cases} Y: (0, 3) \\ X: \text{No tiene} \end{cases}$

$g(x) < 0$ si $x > \ln 2$; $g(x) > 0$ si $x < \ln 2$.

c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x))$ $\begin{cases} Y: (0, 1 - \ln 3) \\ X: (e - 3, 0) \end{cases}$

$h(x) < 0$ si $x > e - 3$; $h(x) > 0$ si $x < e - 3$.

d) $k(x) = \frac{e^x}{x}$. No corta a ninguno.

$k(x) < 0$ si $x < 0$; $k(x) > 0$ si $x > 0$.

3. a) $f(x) = \sin^2 x$. Período: $T = \pi$, porque

$$\sin^2(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cdot \sin(x + \pi) = (-\sin x) \cdot (-\sin x) = \sin^2 x$$

b) $g(x) = 4 \cos\left(\frac{4\pi x}{3}\right)$, $T = 2\pi$: $\frac{4\pi}{3} = \frac{3}{2}$

4. a) $f(x) = \ln|x^2 - 5|$. Es una función par: $f(-x) = f(x)$

b) $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -g(x)$.

Es una función impar.

c) $h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$. Es impar, ya que $h(-x) = -h(x)$.

5. a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{5}$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \ln 1 = 0$; $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -\infty$

6. a) Vertical: $x = \ln 2$, porque $\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{2 + e^x}{2 - e^x} = \infty$

Horizontales: $y = \pm 1$, porque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + e^x}{2 - e^x} = \frac{2}{2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{2 - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x} + 1}{2e^{-x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

b) Oblicuas: $y = \pm x$, porque $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}\right) = 0$

7. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c = -12 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) > 0 \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Creciente.

$f'(x) < 0 \forall x \in (0, 2)$. Decreciente.

En $x = 0$ hay un máximo relativo.

8. a) $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

Punto de inflexión para $x = 0$.

b) $g(x) = \sin x - \cos x$; $g''(x) = -\sin x + \cos x$

Período: $T = 2\pi$, se estudia $g(x)$ en $[0, 2\pi)$.

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ o $x = \frac{5\pi}{4}$, en los que hay inflexión.

Cóncava hacia arriba en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$.

Cóncava hacia abajo en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

