11 Funciones derivables

Propuesta A

1. La función $f(x)=\sqrt{\ln(\cos x)}$ existe para infinitos valores de x, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|+5x-3$ haciendo un estudio especial en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

3. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ que sea paralela a la recta de ecuación $3x-y+1=0$. ¿Cuál es el punto de tangencia?

4. Dada la función $f(x)=3x^2+4x-3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo [1, 3].

5. Calcula el valor de *m, n* y *k*, con $k < 0$, para que la función $f(x)=\begin{cases}3x^2+3 & \text{si } x\le 0\\ x^3+mx+n & \text{si } x>0\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [k, 1] y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.

6. Determina los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x-3} & \text{si } x<1\\ x^2+b & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [–1, 2] y halla el valor intermedio correspondiente.

7. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,e^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

8. De todos los sectores circulares de perímetro 4, determina la amplitud y el radio del que tiene área máxima.

9. La producción de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura del mismo, según la expresión $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$ en donde x representa la temperatura en ºC y $Q(x)$ la producción de hortalizas en kg. Se prevé que la temperatura no pueda bajar de 0 ºC para evitar las heladas.

a) ¿Cuál deberá ser la temperatura óptima del invernadero para obtener la mayor cantidad de hortalizas?

b) ¿Qué cantidad de hortalizas se obtendrá en este último caso?

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

Propuesta B

1. La función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x-1}$ existe para infinitos valores de *x*, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Determina el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases} kx-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ x^3-3x^2+6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 2 y, si fuera posible, calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.

3. Desde el punto *P*(1, 0) se trazan las tangentes a la curva de ecuación $y=x^2+2$. Determina los puntos de tangencia y las ecuaciones de dichas tangentes.

4. Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos *A*(0, 1), *B*(2, 3) y *C*(–2, 7) y halla un punto en el segmento de parábola de extremos *A* y *B* en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por *A* y *B.*

5. Calcula el valor de *a, b* y *k*, con *k* > 1, para que la función $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+b(x-1)+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, *k*] y determina el valor *x* = *c* que verifica la tesis del teorema.

6. Demuestra que para cualquier número real *p,* la ecuación $2x^5+x+p=0$ tiene una y solamente una solución real.

7. Calcula los límites:

a) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+6x}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-x}{x-\operatorname{sen}2x}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

8. Dado un segmento $\overline{AC}=a$, divídelo en dos partes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que construyendo un cuadrado *ABED* sobre $\overline{AB}$ y un triángulo equilátero *BCF* sobre $\overline{BC}$ la suma de sus áreas sea mínima.

9. Halla, utilizando métodos de optimización de funciones, la distancia del punto *P*(2, 1, 6) a la recta de ecuación $r:\begin{cases} x=1-2k \\ y=-2+k \\ z=2+2k \end{cases}$. Determina el punto de la recta más próximo al punto *P.*

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

b) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$

Soluciones propuesta A

1. El dominio $D(f) = \{x \in \mathbf{R},\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. La función es composición del valor absoluto y funciones polinómicas; por tanto, es continua en todo **R** y derivable excepto, quizás, en $x = 0$ y en $x = 3$, valores que anulan el polinomio afectado por el valor absoluto.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3+3x^2+5x}{x} = 5$$

En $x = 3$ se estudian las derivadas laterales.

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-x^3+3x^2+5x-15}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(5-x^2)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(5-x^2) = -4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+5x-15}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+5)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x^2+5) = 14$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbf{R} - \{3\}$.

3. $m = f'(a) \Rightarrow 3 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4$

$f(a) = f(4) = 2$. El punto de tangencia es $(4, 2)$ y la recta tangente $y - 2 = 3(x-4)$.

4. La función $f(x)$ es continua y derivable porque es polinómica, por tanto, existe $c \in [1, 3]$ tal que $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{36-4}{2} = 16 = f'(c) = 6c + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

5. La función debe ser continua en $[k, 1]$ y derivable en $(k, 1)$. Basta con estudiar en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = n$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = m$

Además $f(k) = f(1) \Rightarrow 3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

El valor de c que verifica la tesis es $c = 0$, ya que $0 \in \left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}, 1\right)$ y $f'(0) = 0$.

6. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \dfrac{a}{-2} = 1 + b$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \dfrac{-a}{4} = 2 \Rightarrow a = -8$, $b = 3$

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \dfrac{7-2}{3} = \dfrac{5}{3} = f'(c)$.

Hay dos posibilidades: $\dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{(c-3)^2} \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{\dfrac{24}{5}}$

Pero solo $c = 3 - \sqrt{\dfrac{24}{5}} \in (-1, 1)$

De la otra posibilidad, $\dfrac{5}{3} = 2c \Rightarrow c = \dfrac{5}{6} \notin (1, 2)$

7. a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2-8x-12}{2x-6} = 2$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2xe^{2x}-e^{x}-1}{2e^{2x}} = -1$

c) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2e^x(e^x-1)} =$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2e^x(e^x-1)+2e^xe^x} = \dfrac{1}{2}$

8. $S = \dfrac{r^2\alpha}{2}$. Pero $2r + \alpha r = 4 \Rightarrow \alpha = \dfrac{4-2r}{r}$

$S = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{4-2r}{r} = 2r - r^2 \Rightarrow S' = 2 - 2r$

El dominio de la función es $(0, 2)$ y la derivada se anula para $r = 1$ y $S''(1) < 0$, por lo que hay un máximo relativo para $r = 1$ y $\alpha = 2$.

9. El dominio es $D(f) = [0, 32]$ ya que no puede haber una producción negativa. La derivada es $Q'(x) = 3(x+1)(21-x)$, que se anula para $x = 21 \in D(f)$. Como $Q(0) = 32$, $Q(21) = 5324$ y $Q(32) = 0$, la máxima producción es 5324 kg y se consigue a 21 ºC.

10. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$

$f''(x) = \dfrac{-4+3x}{x^3}$

	0 … $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ … $+\infty$
f''	–	+
f	$\cap$	$\cup$

Punto de inflexión: $\frac{4}{3}$

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x-x^2-1}{e^x}$

$f''(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{e^x}$

	$-\infty$ … 1	1 … 3	3 … $+\infty$
f''	+		+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Ptos. de inflexión:1, 3

11. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

	0 … e	e … $+\infty$
f'	+	–
f	crece	decrece

Máximo relativo: e

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

	$-\infty$ … 1	1 … $+\infty$
f'	–	+
f	decrece	crece

Mínimo relativo: 1

Soluciones propuesta B

1. El dominio, $D(f) = \{x \in \mathbf{R},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. Para que sea derivable ha de ser continua.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2k-4=2 \Rightarrow k=3$$

Para $k = 3$, $f'(2^-) = -1$ y $f'(2^+) = 0$, f no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no tiene tangente.

3. Las tangentes en el punto $A(a, f(a))$ tienen una pendiente $m = f'(a) = 2a$, luego su ecuación es $y = 2a(x-1)$ ya que pasa por el punto (1, 0). La intersección de la tangente con la curva tiene que ser un único punto.

$\begin{cases} y = x^2+2 \\ y = 2a(x-1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + 2(a+1) = 0$. Como la solución es doble, el discriminante es cero: $4a^2 - 8(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Para $a = 1+\sqrt{3}$, el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1+\sqrt{3},\ 6+2\sqrt{3})$ e $y = \left(2+2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

Para $a = 1-\sqrt{3}$ el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1-\sqrt{3},\ 6-2\sqrt{3})$ e $y = \left(2-2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

4. La ecuación será $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} c = 1 \\ 4a+2b+c = 3 \\ 4a-2b+c = 7 \end{cases}$

se obtiene $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$\frac{3-1}{2-0} = f'(c) \Rightarrow 1 = 2c-1 \Rightarrow c = 1 \in (0,\ 2)$$

5. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a+4 \Rightarrow a = -1$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 3 = -2+b \Rightarrow b = 5$

$$f(-2) = f(k) \Rightarrow -6 = -k^2 + 5(k-1) + 4 \Rightarrow k = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -2c+5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in \left(-2,\ \frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)$$

6. Si se considera la función $f(x) = 2x^5 + x + p$ cuya derivada, $f'(x) = 10x^4 + 1 > 0\ \ \forall x$, indica que es monótona creciente. Como

$\lim_{x\to -\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = +\infty$, la función corta solo una vez al eje de abscisas.

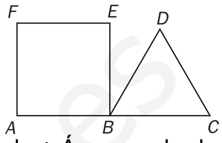
7. a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{3x^2+6x} = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+8x+4}{6x+6} = 0$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 2x - 1}{1 - 2\cos 2x} = -1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}$

8. Llamando $x = BC$,



$AB = a - x$

Lado del cuadrado: $l = a - x$

Área total = Área triángulo + Área cuadrado:

$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + (a-x)^2$, con $D = (0,\ a)$

$S' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - 2(a-x) = 0 \Rightarrow x_a = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$. Como

$S(0) = a^2 > S(a) = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} > S(x_a) = \frac{4\sqrt{3}+9}{(4+\sqrt{3})^2} a^2$

Área mínima: $AB = \frac{\sqrt{3}a}{4+\sqrt{3}}$, $BC = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$

9. Punto genérico de r: $A(1-2k,\ -2+k,\ 2+2k)$.
Hay que minimizar

$$d(k) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(-1-2k)^2 + (-3+k)^2 + (-4+2k)^2}$$

$d'(k) = \frac{9(k-1)}{\sqrt{9k^2 - 18k + 26}} = 0 \Rightarrow k = 1$, que da el mínimo de $d(k)$: $d(P, r) = \sqrt{17}$ y $A(-1,\ -1,\ 4)$.

10. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x^2-2x+5)^2}}$

$$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}} > 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$$

f no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba (∪) en todo **R**.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f''(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

	$-\infty$ $\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	–	+
f	∩	∪

Inflexión: $\sqrt{e^3}$

11. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} \le 0\ \ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ siempre decrece y no tiene extremos relativos.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
f'	+	–	+
f	crece	decrece	crece

Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: 2