

Soluciones

$$1. f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(2+h) + 2 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 3 - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h - 5}{h}$$

No es derivable por la derecha.

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 3x + 4 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ x^2 - 3x - 4 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x^2 + 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 \\ -2x - 3 \\ 2x - 3 \\ -2x + 3 \\ 2x + 3 \end{cases}$$

Al ser continua f en los puntos pedidos, las derivadas laterales se pueden calcular a partir de la función f' que, en principio, no está definida para $x = -4$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 2$.

a) $f'(-2^-) = 1$, $f'(-2^+) = -7$ d) $f'(-4^-) = -5$, $f'(-4^+) = 5$

b) $f'(-1^-) = -5$, $f'(-1^+) = 5$ e) $f'(0) = 3$

c) $f'(2^-) = -1$, $f'(2^+) = 7$

3. Para $x \neq 1$, f es continua y derivable, ya que está definida por polinomios. Para $x = 1$ resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 - bx^2) = a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 2ax) = 1 - 2a$$

Y de aquí se deduce: $a - b = 1 - 2a \Rightarrow \boxed{b = 3a - 1}$.

Con esta condición, f es continua en $x = 1$ y, por tanto, sus derivadas laterales en ese punto se pueden calcular como los límites de la función f' .

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx & \text{si } x < 1 \\ -2a & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3a - 2b \\ f'(1^+) = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a - 2b = -2a \Rightarrow \boxed{2b = 5a}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones cuadradas se llega a la solución buscada: $a = 2$, $b = 5$.

4. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2b - 4 = 2 \Rightarrow b = 3$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b - 4 = -1 \Rightarrow b = 3$$

$$f(a) = f(4) \Rightarrow 3a - a^2 = 1, a < 2 \Rightarrow a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38$$

El teorema afirma que $\exists c \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 4 \right]$ que verifica

$f'(c) = 0$ y como $-\frac{4}{x^2} \neq 0 \forall x$, la derivada tiene que anularse para algún valor del intervalo

$$\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2 \right], \quad 3 - 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2 \right]$$

5. a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow m + 2n = 12$

$$f'(-2^-) = f'(-2^+) \Rightarrow -4 + n = 12 \Rightarrow n = 16 \Rightarrow m = -20$$

b) $\exists c \in (-4, 2) / \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)} = \frac{-12 - (-48)}{6} = 6 = f'(c)$

$$2c + 16 = 6 \Rightarrow c = -5 \notin (-4, 2)$$

$$3c^2 = 6 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \in (-2, 2)$$

6. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3} - 2\operatorname{sen} x}{1 - 4\cos^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{-2\cos x}{8\operatorname{sen} x \cos x} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{6x-2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^2 + x - 1)}{\operatorname{tg}(1-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x^2 + x - 1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(1-x)} = -3$

7. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $f'(x) = \frac{3(x^4 - 1)}{x^4}$ solo se anula para

$$x = \pm 1. \text{ Como } f''(x) = \frac{12}{x^5} \Rightarrow f''(-1) < 0, f''(1) > 0.$$

Máximo relativo en el punto $(-1, -4)$ y mínimo en $(1, 4)$. f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

f cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba en $(0, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

b) $D(k) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$; $k'(x) = \frac{-4}{1 - 4x^2}$; $k''(x) = \frac{-32x}{(1 - 4x^2)^2}$

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Es siempre decreciente en su dominio.

Como $k''(x) > 0 \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$, en este intervalo es cóncava hacia arriba, y es cóncava hacia abajo si

$x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$, ya que $k''(x) < 0$ en este intervalo.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

8. Llamando x a la altura del cono, su volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\pi x(144 - x^2) \text{ con dominio } (0, 12).$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi(144 - 3x^2) \text{ solo se anula para } x = \sqrt{48}. \text{ Y}$$

como $V(0) = 0$, $V(12) = 0$ y $V(\sqrt{48}) = 32\pi\sqrt{48} \text{ cm}^3$, resulta que este es el volumen máximo y las dimensiones del triángulo son: $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}$, 12 cm .

9. Llamando x a la arista de la base, la altura es $\frac{8}{x^2}$ y el

$$\text{precio } P(x) = 15x^2 + 12 \left(4x \cdot \frac{8}{x^2} \right) = 15x^2 + \frac{384}{x} \text{ con do-}$$

minio $(0, +\infty)$. $P'(x) = 30x - \frac{384}{x^2}$ solo se anula para

$$x = \sqrt[3]{\frac{64}{5}} \text{ que corresponde al mínimo de la función. Las}$$

dimensiones son $x \approx 2,34 \text{ m}$, $h \approx 1,46 \text{ m}$

10. $F'(x) = -6(x+5)(x-8)$ que solo se anula para $x = 8$.

a) De 0 a 8 creció y de 8 a 10 decreció.

b) El mejor momento hubiera sido a los 8 años con un valor de $F(8) = 1592000 \text{ €}$. Como $F(10) = 1420000 \text{ €}$, ha dejado de ganar 172000 € .