

# 10 Derivadas

## Propuesta A

- Halla la tasa de variación media de la función  $f(x) = x^2 - 4$  en los intervalos  $[0, 2]$  y  $[a, a + h]$ .
- Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.
  - $f(x) = x^3 + 1$  en  $x = -1$
  - $f(x) = \frac{x}{x+1}$  en  $x = -2$
  - $f(x) = \sqrt{x+2}$  en  $x = 2$
- Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? ¿Cuál es su ecuación?
  - $f(x) = x^2 + x - 1$  en  $x = 1$
  - $f(x) = \frac{2}{x+3}$  en  $x = -1$
- Dadas dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  de las que se conoce  $f(2) = 3$ ,  $g(2) = -1$ ,  $g'(-1) = -3$ ,  $g'(2) = 0$ ,  $g'(3) = 5$ ,  $f'(-1) = 2$  y  $f'(2) = 4$ , calcula:
  - $(f+g)'(-1)$
  - $(f \cdot g)'(2)$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
  - $(f \circ g)'(2)$
  - $(g \circ f)'(2)$
- Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$  sea continua y derivable en  $x = 0$ .
- Si  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $h(x) = x^2$ , calcula:
  - $(g \circ h)'(2)$
  - $(h \circ g \circ f)'(1)$
  - $(f \circ h \circ g)'(4)$
  - $(g \circ f \circ h)'(x)$
- Se considera la función  $f(x) = x^3 + x - 11$ . Calcula la derivada de la función inversa de  $f(x)$  en  $x = -9$ .
- Halla la función derivada de las siguientes funciones trigonométricas:
  - $a(x) = \sin^2(x)$
  - $b(x) = \arcsen(2x)$
  - $c(x) = \arccos^2(x)$
  - $d(x) = \arccos(x^2)$
  - $e(x) = \operatorname{tg}(2x)$
  - $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{x}\right)$ .
- Calcula la derivada de las funciones:
  - $a(x) = \ln(x \cdot \cos x)$
  - $b(x) = \ln x \cdot \cos x$
  - $c(x) = \cos(x \cdot \ln x)$
  - $d(x) = e^{2x}$
  - $e(x) = x \cdot e^x$
  - $f(x) = e^{\ln x}$
  - $g(x) = 2^x \cdot x^2$
  - $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{x}}$ .
- La posición respecto del origen, en metros, de un móvil viene dada por la función  $s(t) = 3t^2 - 1$ , donde el tiempo  $t$  viene dado en segundos.
  - Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal  $[1, 4]$ .
  - Obtén la velocidad instantánea para  $t = 2$  segundos.
- Teniendo en cuenta que  $\ln(50) \approx 3,912$ , calcula mediante aproximación con diferenciales  $\ln(54)$ ,  $\ln(46)$  y  $\ln(40)$ . Compara los resultados obtenidos con los que se obtienen con la calculadora y halla el error relativo que se comete en cada caso. ¿Por qué se comete más error en unos casos que en otros?
- Se tiene un globo esférico de radio  $r = 2$  m. Por efecto de la dilatación de los gases que contiene, su radio aumenta un  $dr = 3$  cm. ¿Cuánto ha aumentado su volumen?

## Propuesta B

1. Halla la tasa de variación media de la función  $f(x) = x^3$  en los intervalos  $[-3, 1]$  y  $[a, a + h]$ .
2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica.
  - a)  $f(x) = x^2 - 1$  en  $x = 3$
  - b)  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  en  $x = -2$
  - c)  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 1$
3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? Halla la ecuación de la normal.
  - a)  $f(x) = 3x + 2$  en  $x = 2$
  - b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  en  $x = 0$
4. Dadas dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  de las que se conoce  $f(2) = g(2) = 1$ ,  $g'(1) = -\frac{3}{4}$ ,  $g'(2) = -\frac{1}{3}$ ,  $f'(1) = 2$  y  $f'(2) = 4$ , calcula:
  - a)  $(f+g)'(1)$
  - b)  $(f \cdot g)'(2)$
  - c)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
  - d)  $(f \circ g)'(2)$
  - e)  $(g \circ f)'(2)$
5. Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  sea continua y derivable en todo  $\mathbf{R}$ .
6. Si  $f^{-1}(x) = x \cdot e^x$  en  $(0, +\infty)$ , calcula la derivada de la función  $f(x)$  en  $x = \ln 4$ , es decir,  $f'(\ln 4)$ , y la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en ese punto.
7. Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:
  - a)  $a(x) = \cos^2(x)$
  - b)  $b(x) = \arcsen(x^2)$
  - c)  $c(x) = \cos(2x) \operatorname{tg}(2x)$
  - d)  $d(x) = \sec^2 x$
  - e)  $e(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$
  - f)  $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
8. Calcula la derivada de las funciones:
  - a)  $a(x) = 5^{2x}$
  - b)  $b(x) = (x-1)e^x$
  - c)  $c(x) = \ln(e^x)$
  - d)  $d(x) = 3^x \cdot x^3$
  - e)  $e(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$
  - f)  $f(x) = \ln \sqrt{x}$
  - g)  $g(x) = \log\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)$
  - h)  $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}}$
9. La curva de ecuación  $x^3 + 3x^2y + y^2 + 28 = 0$  pasa por el punto  $(-2, -2)$ . Calcula la derivada de la función y en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?
10. Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.
  - a)  $f(x) = \sqrt[3]{5-4x}$
  - b)  $g(x) = (3x+1)^{2x}$
11. Halla la función diferencial de las siguientes funciones:
  - a)  $y = \frac{-7x+4}{x+5}$
  - b)  $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0)$
12. Utiliza diferenciales para aproximar el valor de  $3,001^5 - 4 \cdot 3,001^3 - 3 \cdot 3,001$  y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Soluciones propuesta A

1.  $TVM f[0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0-(-4)}{2} = 2$   
 $TVM f[a, a+h] = \frac{(a+h)^2 - 4 - (a^2 - 4)}{h} = h + 2a$

2. a)  $TVI(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3h + 3) = 3$

b)  $TVI(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-2}{h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h-1} = 1$

c)  $TVI(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$

3. a)  $\operatorname{tg} \alpha = m = f'(1) = 3 \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$   
 Ecuación de la tangente  $y - 1 = 3(x - 1)$

b)  $m = f'(-1) = \frac{-2}{(-1+3)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$   
 Ecuación de la tangente:  $y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1)$

4. a)  $(f+g)'(-1) = f'(-1) + g'(-1) = -1$

b)  $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 4(-1) + 3 \cdot 0 = -4$

c)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{[g(2)]^2} = -4$

d)  $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(-1)g'(2) = 0$

e)  $(g \circ f)'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(-1)f'(2) = -12$

5. Para que sea continua en  $x = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 = b$$

Para que sea derivable en  $x = 0$ , las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6.  $f'(x) = \frac{-1}{2x^2}$ ,  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ,  $h'(x) = 2x$

a)  $(g \circ h)'(2) = g'[h(2)]h'(2) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

b)  $(h \circ g \circ f)'(1) = h'[g(f(1))]g'(f(1))f'(1) = -\frac{1}{2}$

c)  $(f \circ h \circ g)'(4) = f'[h(g(4))]h'(g(4))g'(4) = -\frac{1}{50}$

d)  $(g \circ f \circ h)'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2x^2\sqrt{1+2x^2}}$

7.  $f(c) = -9 \Rightarrow c^3 + c - 11 = -9 \Rightarrow c = 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \text{ . Derivando:}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(-9) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-9))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

8. a)  $a'(x) = \operatorname{sen} 2x$       d)  $d'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b)  $b'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$       e)  $e'(x) = 2 \sec^2(2x)$

c)  $c'(x) = \frac{-2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$       f)  $f'(x) = \frac{-2}{x^2} \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)$

9. a)  $a'(x) = -\frac{\operatorname{tg} x}{x}$       e)  $e'(x) = e^x(x+1)$

b)  $b'(x) = \frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \operatorname{sen} x$       f)  $f'(x) = 1$

c)  $c'(x) = -(1 + \ln x) \operatorname{sen}(x \ln x)$

d)  $d'(x) = 2e^{2x}$       g)  $g'(x) = 2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)$

h)  $h(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \ln x \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2x}$

10. a)  $v_m = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{47 - 2}{3} = 15 \text{ ms}^{-1}$

b)  $v_i = s'(2) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ ms}^{-1}$

11.  $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$ ,  $f(x+dx) \approx f(x) + dy$

$$\ln(54) \approx \ln(50) + \frac{1}{50} \cdot 4 = 3,912 + 0,08 = 3,992$$

$$Er = \frac{|3,992 - 3,98898|}{3,98898} = 0,0756\%$$

$$\ln(46) \approx \ln(50) + \frac{1}{50}(-4) = 3,912 - 0,08 = 3,832$$

$$Er = \frac{|3,832 - 3,82864|}{3,82864} \cdot 100 = 0,0877\%$$

$$\ln(40) \approx \ln(50) + \frac{1}{50}(-10) = 3,912 - 0,2 = 3,712$$

$$Er = \frac{|3,712 - 3,68888|}{3,68888} \cdot 100 = 4,96\%$$

cuanto más lejos de  $x = 50$ , mayor es el error.

12.  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ,  $dV = 4 \pi r^2 dr$

$$\Delta V \approx dV = 4 \pi 2^2 \cdot 0,03 = 1,508 \text{ m}^3$$

## Soluciones propuesta B

$$1. \quad TVM \ f[-3,1] = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{1-(-27)}{4} = 7$$

$$TVM \ f[a, a+h] = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = h^2 + 3ha + 3a^2$$

$$2. \quad a) \quad TVI(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 1 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$b) \quad TVI(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2+h-1-3}{-2+h} \cdot \frac{1}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(h-2)} = \frac{1}{4}$$

$$c) \quad TVI(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$$

$$3. \quad a) \quad m = f'(2) = 3 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

$$\text{Ecuación de la normal: } y - 8 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$b) \quad m = f'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 0 = \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

La tangente es horizontal y la normal es la recta vertical  $x = 0$ .

$$4. \quad a) \quad (f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 2 + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$b) \quad (fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = \frac{11}{3}$$

$$c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{[g(2)]^2} = \frac{13}{3}$$

$$d) \quad (f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(1) g'(2) = -\frac{2}{3}$$

$$e) \quad (g \circ f)'(2) = g'(f(2)) f'(2) = g'(1) f'(2) = -3$$

5. Si  $x \neq 1$ ,  $f$  es derivable al estar definida por polinomios. Para que sea continua en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow a = b - 1$$

Para que sea derivable en  $x = 1$ , las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a + b = 2b \Rightarrow 2a - b = 0$$

$$\text{Y de aquí: } \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$6. \quad f^{-1}(c) = \ln 4 \Rightarrow c \cdot e^c = \ln 4 \Rightarrow c = \ln 2$$

$$(f^{-1})'(x) = e^x(1+x) \Rightarrow (f^{-1})'(\ln 2) = 2(1+\ln 2)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x. \text{ Derivando la función}$$

compuesta:

$$(f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1 \Rightarrow f'(\ln 4) =$$

$$= \frac{1}{(f^{-1})'(f(\ln 4))} = \frac{1}{(f^{-1})'(\ln 2)} = \frac{1}{2(1+\ln 2)}$$

$$\text{Ec. tangente: } y - \ln 2 = \frac{1}{2(1+\ln 2)}(x - \ln 4)$$

$$7. \quad a) \quad a'(x) = -\operatorname{sen} 2x \quad c) \quad c'(x) = 2 \cos(2x)$$

$$b) \quad b'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad d) \quad d'(x) = 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$$

$$e) \quad e'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$f) \quad f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$8. \quad a) \quad a'(x) = 2 \ln 5 \cdot 5^{2x} \quad e) \quad e'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$$

$$b) \quad b'(x) = x \cdot e^x \quad f) \quad f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$c) \quad c'(x) = 1 \quad g) \quad g'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x)} \cdot \frac{1}{\ln 10}$$

$$d) \quad d'(x) = 3^x x^2 (x \ln 3 + 3)$$

$$h) \quad h(x) = \frac{1}{2} [\ln(1 - \operatorname{sen} x) - \ln(1 + \operatorname{sen} x)]$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} \right] = -\frac{1}{\cos x}$$

$$9. \quad 3x^2 + 6xy + 3x^2y' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 - 6xy}{3x^2 + 2y}$$

$$f'(-2, -2) = -\frac{9}{2}. \text{ Ecuación: } y + 2 = -\frac{9}{2}(x + 2)$$

$$10. \quad a) \quad \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln(5 - 4x) \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln(5 - 4x) + \frac{-4}{x(5 - 4x)}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{5 - 4x} \left[ -\frac{1}{x^2} \ln(5 - 4x) + \frac{-4}{x(5 - 4x)} \right]$$

$$b) \quad \ln g(x) = 2x \cdot \ln(3x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = (3x + 1)^{2x} \left[ 2 \ln(3x + 1) + \frac{6x}{3x + 1} \right]$$

$$11. \quad a) \quad dy = \frac{-39}{(x+5)^2} dx$$

$$b) \quad dx = A \omega \cos(\omega t + \phi_0) dt$$

$$12. \quad f(3 + dx) = f(3) + \Delta y \approx f(3) + dy$$

$$dy = (5x^4 - 12x^2 - 3) dx; \quad dy(3) = 294 dx$$

$$f(3,001) = 3,001^5 - 4 \cdot 3,001^3 - 3 \cdot 3,001 \approx$$

$$\approx f(3) + dy = 126 + 294 \cdot 0,001 = 126,294$$