10 Derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN — **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Calcular la derivada de una función en un punto mediante su definición como límite.

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2x^2 + x + 3$ en $x = 1$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$ en $x = -2$

2. El espacio, en metros, recorrido por un móvil viene expresado por la función $s(t) = 4t^2 - t$, t en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en los dos primeros segundos de recorrido.

b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 1$ s.

B. Determinar la pendiente de la tangente a una curva en un punto y calcular su ecuación y la de la recta normal a la función en dicho punto.

3. Obtén la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Cuál es la ecuación de la tangente? ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje X? ¿Cuál es la ecuación de la normal?

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$. ¿En qué punto corta esta recta al eje X?

C. Determinar, mediante la aplicación de las reglas de derivar, la derivada de funciones que se obtienen operando con funciones elementales.

5. Dadas $f(x)$ y $g(x)$ de las que se sabe $f(-2) = 3$, $g(-2) = -1$, $g'(-2) = 7$, $g'(3) = -5$, $f'(3) = 0$, $f'(-2) = 6$ y $f'(-1) = -3$, calcula:

a) $(f + g)'(3)$ b) $(f \cdot g)'(-2)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2)$ d) $(f \circ g)'(-2)$ e) $(g \circ f)'(-2)$

D. Derivar funciones que sean composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

6. Si $f(x) = 1 + 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 + 1$, calcula:

a) $(g \circ h)'(2)$ b) $(h \circ g \circ f)'(1)$ c) $(f \circ h \circ g)'(4)$ d) $(g \circ f \circ h)'(x)$

7. Halla la función derivada de las funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^5$ b) $g(x) = \text{sen}^2(\ln(2x + 1))$ c) $h(x) = \sqrt{\cos(1 - 3x)}$

E. Aplicar la regla de la cadena para obtener la derivada de la función inversa.

8. Calcula la derivada de la función inversa de $f(x) = x^3 + x - 11$ en $x = -1$.

F. Aplicar la derivación logarítmica y la implícita.

9. Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.

a) $f(x) = \sqrt[x]{2x + 1}$ b) $g(x) = (\text{sen}\, x)^{2x+1}$ c) $h(x) = 3^{5x^2}$

10. La curva de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ pasa por el punto $(2, -1)$. Calcula la derivada de la función y en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?

G. Hallar el valor de la diferencial de una función en un punto para un incremento conocido de la variable.

11. Calcula el diferencial de la función $y = f(x) = \sqrt{3x - 2}$ en $x = 9$ para un incremento de la variable $\Delta x = 0{,}2$.

12. Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{343} = 7$, calcula, aproximando mediante la diferencial, el valor de $\sqrt[3]{345}$.

H. Obtener diferenciales de funciones y en especial de funciones que expresen magnitudes físicas.

13. Halla la función diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 - 7x + 4$ b) $s = \text{sen}\, t$ c) $u = \ln v$

14. La función que determina el volumen de una esfera de radio r es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Calcula dV e interpreta el resultado obtenido.

Soluciones

1. a) $f'(1) = \lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+3-6}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = 5$

b) $f'(-2) = \lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\dfrac{\dfrac{3}{x+5}-1}{x+2} =$

$= \lim_{x\to -2}\dfrac{-(x+2)}{(x+5)(x+2)} = -\dfrac{1}{3}$

2. a) $v_m = \dfrac{s(2)-s(0)}{2-0} = \dfrac{14}{2} = 7$ m/s

b) $v_i = \lim_{h\to 0}\dfrac{s(1+h)-s(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+7) = 7$ m/s

3. $m = f'(-2) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\dfrac{\left[2(2+h)^2-3(2+h)\right]-(2\cdot 2^2-3\cdot 2)}{h} = 5$

$y - f(2) = m(x-2) \Rightarrow y - 2 = 5(x-2)$

$\operatorname{tg}\alpha = 5 \Rightarrow \operatorname{arctg}(5) \approx 78°\ 41'\ 24''$

4. $f(0) = 1$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, $f'(0) = -1$; la ecuación de la recta tangente es $y - 1 = -1\cdot(x-0) \Rightarrow y = -x+1$.

Punto de corte: $\begin{cases} y = -x+1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(1,\ 0)$

5. a) $(f+g)'(3) = f'(3) + g'(3) = 0 + (-5) = -5$

b) $(f\cdot g)'(-2) = f'(-2)\cdot g(-2) + f(-2)\cdot g'(-2) =$
$= 6\cdot(-1) + 3\cdot 7 = -6 + 21 = 15$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2) = \dfrac{f'(-2)\cdot g(-2) - f(-2)\cdot g'(-2)}{(g(-2))^2} =$

$= \dfrac{6\cdot(-1) - 3\cdot 7}{(-1)^2} = \dfrac{-6-21}{1} = -7$

d) $(f\circ g)'(-2) = f'(g(-2))\cdot g'(-2) = f'(-1)\cdot g'(-2) =$
$= (-3)\cdot 7 = -21$

e) $(g\circ f)'(-2) = g'(f(-2))\cdot f'(-2) = g'(3)\cdot f'(-2) =$
$= (-5)\cdot 6 = -30$

6. $f'(x) = 2$ $\qquad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad h'(x) = 2x$

a) $(g\circ h)'(2) = g'(h(2))\cdot h'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $(h\circ g\circ f)'(1) = h'(g(f(1)))\cdot g'(f(1))\cdot f'(1) =$

$= 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2 = 2$

c) $(f\circ h\circ g)'(4) = f'(h(g(4)))\cdot h'(g(4))\cdot g'(4) =$

$= 2\cdot 2\sqrt{4}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 2$

d) $(g\circ f\circ h)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+2(x^2+1)}}\cdot 2\cdot 2x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$

7. a) $f'(x) = 5(x^2-3x+5)^4\cdot(2x-3)$

b) $g'(x) = 2\operatorname{sen}(\ln(2x+1))\cdot\cos(\ln(2x+1))\cdot\dfrac{2}{2x+1}$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos(1-3x)}}\cdot(-\operatorname{sen}(1-3x))\cdot(-3) =$

$= \dfrac{3\operatorname{sen}(1-3x)}{2\sqrt{\cos(1-3x)}}$

8. $f(c) = -1 \Rightarrow c^3 + c - 11 = -1 \Rightarrow c = 2$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 13$

$(f\circ f^{-1})(x) = x$. Derivando la función compuesta:

$f'(f^{-1})(x))\cdot(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f^{-1})(-1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$

9. a) $\ln f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\ln(2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(2x+1) + \dfrac{1}{x(2x+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[x]{2x+1}\cdot\left(-\dfrac{\ln(2x+1)}{x^2} + \dfrac{1}{x(2x+1)}\right)$

b) $\ln(g(x)) = (2x+1)\cdot\ln(\operatorname{sen}x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 2\ln(\operatorname{sen}x) + (2x+1)\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x} \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = (\operatorname{sen}x)^{2x+1}\cdot(2\ln(\operatorname{sen}x) + (2x+1)\operatorname{cotg}x)$

c) $\ln(h(x)) = 5x^2\ln 3 \Rightarrow \dfrac{h'(x)}{h(x)} = (10\ln 3)x \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 3^{5x^2}(10\ln 3)x$

10. $2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-2x-3y}{3x+2y}$

$f'(2,\ -1) = \dfrac{-4+3}{6-2} = -\dfrac{1}{4}$; $y + 1 = -\dfrac{1}{4}(x-2)$

11. $dy = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}dx \Rightarrow dy(x=9) = \dfrac{3}{2\cdot 5}\cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

12. $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$

$\sqrt[3]{345} = \sqrt[3]{343} + \Delta y \approx 7 + dy =$

$= 7 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{343^2}}\cdot 2 \approx 7{,}0136$

13. a) $dy = (10x-7)dx$ $\quad$ b) $ds = \cos t\,dt$ $\quad$ c) $du = \dfrac{1}{v}dv$

14. $dV = 4\pi r^2 dr$. Representa el volumen de una "superficie" esférica de radio r y espesor dr.