

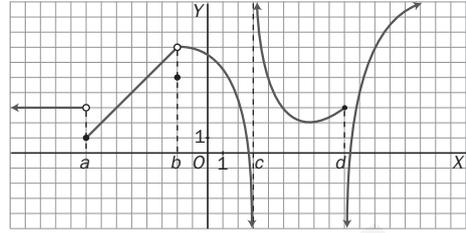
Propuesta A

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ y clasifícalos.
2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{si } x < -2 \\ 6 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ y efectúa una representación gráfica de la misma.
3. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.
4. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbf{R} .
5. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3}$ en $x = 0$.
6. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos:
 - a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 - b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
7. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}}$, indica el tipo de discontinuidad, determina el salto de discontinuidad o, en su caso, el verdadero valor de la función en esos puntos y muestra los intervalos en los que la función es continua.
8. Demuestra que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 3]$. ¿Puede afirmarse lo mismo de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$?
9. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ está acotada en el intervalo $[-2, 2]$. En caso afirmativo calcula su máximo y su mínimo absolutos.
10. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \frac{x}{|x| - 1} & \text{si } x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\} \end{cases}$ y calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
11. Demuestra que las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos(\pi x)$ se cortan al menos en un punto cuya abscisa pertenece al intervalo $[0, 2]$.

Propuesta B

1. Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$. Indica el tipo de discontinuidad.

2. Indica los intervalos en los que la función $f(x)$, representada a continuación, es continua y clasifica los tipos de discontinuidad que presenta.



3. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y esboza su gráfica.

4. Halla el valor del parámetro a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbf{R} .

5. Determina para qué valores de los parámetros a y b la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real.

6. Calcula el verdadero valor de la función $f(x) = \frac{\text{sen}^3 x}{\text{tg} x - \text{sen} x}$ en $x = 0$.

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y haz su representación gráfica.

8. Para cada una de las siguientes funciones calcula el valor de a que las hace continuas en todo \mathbf{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

9. Comprueba si la función $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ verifica las condiciones del teorema de Weierstrass en el intervalo $[1, 4]$. ¿Se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo? ¿Se puede asegurar que la función está acotada en todo su dominio? ¿Podría decirse lo mismo de la función $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$?

10. Demuestra que la ecuación $2^x - 4x = 0$ tiene al menos dos soluciones reales.

11. Construye una función adecuada para demostrar, por el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ toma todos los valores del intervalo $[0, 3]$.

Soluciones propuesta A

1. El dominio es $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)} = 4,$$

en $x = 3$ hay límite; la función tiene una discontinuidad evitable y $f(3) = 4$ es su verdadero valor.

2. Para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, la función es continua al estar definida por polinomios. Falta estudiar lo que ocurre en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (6 - x) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (6) = 6$$

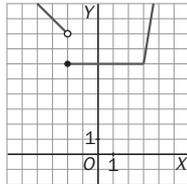
En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito igual a

$$6 - 8 = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (6) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3) = 6$$

En $x = 3$ la función es continua.



3. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$, ya que fuera de este punto es continua al estar definida por polinomios.

$$\text{Como } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax - 1) = a - 1 \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

4. Para ser continua, los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$ han de coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 2 = \sqrt{b} \Rightarrow b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \sqrt{2a+4} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2a+4} = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1.$$

5. El verdadero valor debe coincidir con el límite de la función en ese punto.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{1} + 1} = 3$$

6. a) $f(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

En $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$. Es

continua en $x = 1$ ya que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

$$f(3) = 5, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$$

Es discontinua en $x = 3$ con una discontinuidad inevitable de salto finito.

7. El dominio de la función es

$D(f) = [2, 6) \cup (6, +\infty)$, por lo que hay que estudiar su límite en $x = 6$.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(2+\sqrt{x-2})}{6-x} = -4$$

Como tiene límite, la discontinuidad es evitable y su verdadero valor es $f(6) = -4$. Así, la función es continua en el intervalo $[2, +\infty)$.

8. La función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ es continua y tiene distinto signo en los extremos de $[-1, 3]$, ya que $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$. Por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (-1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función g , ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abscisas:

$$0 = \frac{x^3 - 2}{x - 2} \Rightarrow x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \in [-1, 3]$$

9. Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = -1, \quad f(0) = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ continua en $[-2, 2] \Rightarrow f$ acotada. Por el teorema de Weierstrass f alcanza en dicho intervalo su máximo y su mínimo absolutos.

Como la función decrece en $(-2, 0)$ y crece en $(0, 2)$, basta con hallar $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$.

$f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ y $f(2) = 3$, por lo que el máximo es 3 y se alcanza en los extremos del intervalo. El mínimo, -1 , se da en $x = 0$.

10. Se estudia la función en los valores que anulan el denominador: $|x| - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

f es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$ con una discontinuidad inevitable de salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x-1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x-1} = 1$$

11. Si se cortan $\Rightarrow \exists c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Se construye la función $F(x) = f(x) - g(x)$ que es continua en el intervalo $[0, 2]$ y además $F(0) = -4 < 0$ y $F(2) = 8 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in (0, 2)$ que anulará la función, F , es decir $F(c) = f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$.

Soluciones propuesta B

1. El dominio de f es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \frac{5}{3}$.

En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

2. La función es continua en $\mathbf{R} - \{a, b, c, d\}$.

$x = a$: discontinuidad inevitable de salto finito.

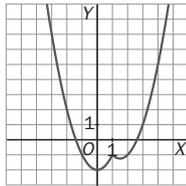
$x = b$: discontinuidad evitable ya que los límites laterales coinciden pero son distintos de $f(b)$.

$x = c, x = d$: discontinuidades inevitables de salto infinito.

3. Para $x \neq 1$, f es continua pues está definida por polinomios. Para $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$, la



función es continua en \mathbf{R} .

4. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$;

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

5. Para que la función sea continua en todo \mathbf{R} , ha de ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + ax + b) = b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + ax) = 9 + 3a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 9) = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

6. El verdadero valor es, si existe, el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \cos x}{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x (1 + \cos x) = 2$$

Luego el verdadero valor es $f(0) = 2$.

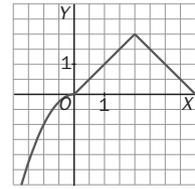
7. Posibles discontinuidades en $x = 1$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x|x| = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1; f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x) = 2; f(2) = 2$$



Por tanto, la función es continua en todo \mathbf{R} .

8. a) Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

- b) Para que sea continua en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 13; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 9 - a \Rightarrow a = -4$$

9. La función es continua en su dominio, $D = \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow$ es continua en el intervalo $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty.$$

La función $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$ es continua en toda la

recta real y como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = 1$

y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow f$ está acotada.

10. Se considera la función continua en toda la recta real $f(x) = 2^x - 4x$, y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (0, 1)$ que verifica $f(c) = 0$, es decir, $x = c$ es una solución de la ecuación $2^x - 4x = 0$. Además, $x = 4$ es otra solución porque $2^4 - 4 \cdot 4 = 0$.

11. $\forall y_0 \in (0, 3)$ se construye $g(x) = f(x) - y_0$, que es continua. $g(-1) = f(-1) - y_0 = 0 - y_0 < 0$;

$$g(2) = f(2) - y_0 = 3 - y_0 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 2) / g(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$$

Además, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 3$.