53119

Soluciones propuesta B

1. El dominio de f es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \frac{5}{3}$.

En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

2. La función es continua en $\mathbf{R} - \{a, b, c, d\}$.

$x = a$: discontinuidad inevitable de salto finito.

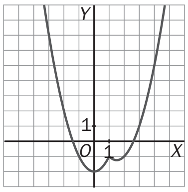
$x = b$: discontinuidad evitable ya que los límites laterales coinciden pero son distintos de $f(b)$.

$x = c$, $x = d$: discontinuidades inevitables de salto infinito.

3. Para $x \neq 1$, f es continua pues está definida por polinomios. Para $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-2) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-3x+1)$$



Como $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = -1$, la función es continua en $\mathbf{R}$.

4. Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$;

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+a-1) = 3+3a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\ln(x-1) = \ln 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow a = -1$$

5. Para que la función sea continua en todo $\mathbf{R}$, ha de ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$,

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax+b) = b = 0\end{array}\right. \Rightarrow b = 0$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+ax) = 9+3a\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+9) = 12\end{array}\right. \Rightarrow a = 1$$

6. El verdadero valor es, si existe, el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\cos x(1+\cos x) = 2$$

Luego el verdadero valor es $f(0) = 2$.

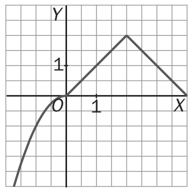
7. Posibles discontinuidades en $x = 1$ y $x = 2$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x|x| = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1\,;\ f(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2\,;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(4-x) = 2\,;\ f(2) = 2$$



Por tanto, la función es continua en todo $\mathbf{R}$.

8. a) Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

b) Para que sea continua en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 13;\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 9-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 9-a \Rightarrow a = -4$$

9. La función es continua en su dominio, $D = \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow$ es continua en el intervalo [1, 4].

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1} = -\infty \ \text{ y } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty\,.$$

La función $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ es continua en toda la recta real y como $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x} = 1$

y $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow f$ está acotada.

10. Se considera la función continua en toda la recta real $f(x) = 2^x - 4x$, y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (0, 1)$ que verifica $f(c) = 0$, es decir, $x = c$ es una solución de la ecuación $2^x - 4x = 0$. Además, $x = 4$ es otra solución porque $2^4 - 4\cdot 4 = 0$.

11. $\forall y_0 \in (0, 3)$ se construye $g(x) = f(x) - y_0$, que es continua. $g(-1) = f(-1) - y_0 = 0 - y_0 < 0$;

$$g(2) = f(2) - y_0 = 3 - y_0 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 2) \,/\, g(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$$

Además, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 3$.