1 VECTORES EN EL ESPACIO. ESPACIO VECTORIAL V^3

1.1. VECTORES FIJOS

Definición: Un ***vector fijo*** es un segmento orientado determinado por dos puntos.

El primero de sus puntos recibe el nombre de ***origen***, y el segundo, ***extremo***. Los vectores fijos se nombran indicando el origen A y el extremo B de la forma: $\overrightarrow{AB}$

Si el origen del vector coincide con el extremo, entonces se trata del ***vector nulo***. Se denota $\vec{0}$.

Elementos de un vector:

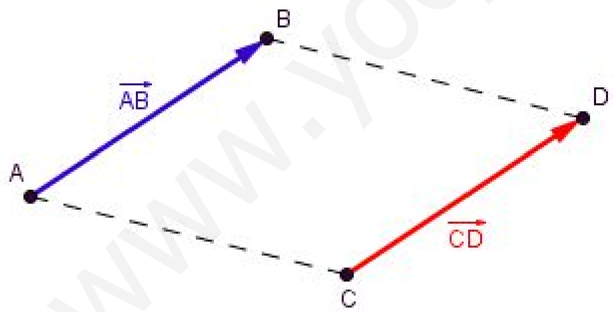
Todo vector fijo $\overrightarrow{AB}$ está caracterizado por tener:

- ***Módulo***: es la longitud del segmento de extremos A y B. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
  Siempre es positivo, excepto el módulo del vector nulo que es cero.
- ***Dirección***: determinada por la dirección de la recta que contiene al segmento y todas sus paralelas.
- ***Sentido***: para cada dirección hay dos sentidos posibles. El que corresponde al definido por el recorrido desde A hasta B y el definido por el recorrido desde B hasta A.

1.2. VECTORES LIBRES

Definición: Se dice que dos ***vectores*** fijos no nulos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son ***equipolentes*** si y sólo si tienen igual módulo, igual dirección e igual sentido. Se denota como $\vec{u} \simeq \vec{v}$.

- Todos los ***vectores nulos*** (de módulo 0) son equipolentes entre sí.
- Dado un vector fijo, el conjunto de todos los vectores equipolentes con él, se dice que forman un ***vector libre*** (todos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido). Cuando un vector libre se refiere a un punto se convierte en un vector fijo.



$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son dos vectores fijos distintos ya que tienen distinto origen pero son el mismo vector libre ya que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

- El conjunto de los vectores libres del espacio se denomina V_3.
- Dos ***vectores*** son ***opuestos*** si tienen la misma dirección e igual módulo pero distinto sentido.

  El vector opuesto al vector $\vec{u}$ se denota como $-\vec{u}$
- ***Vector unitario***: aquel cuyo módulo es 1.

  Dado un vector $\vec{u}$, el vector definido como $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$, pero unitario.

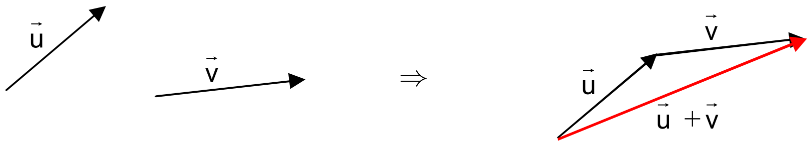
2 OPERACIONES CON VECTORES. ESPACIO VECTORIAL

2.1. ADICIÓN DE VECTORES

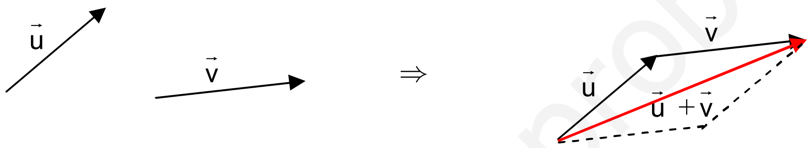
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, la suma $\vec{u}+\vec{v}$ es un nuevo vector que se determina de dos formas:

- 1º forma: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$ de manera que el extremo de $\vec{u}$ coincida con el origen de $\vec{v}$.

  El vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último.



- 2º forma: se sitúan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen común, se completa un paralelogramo. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ es la diagonal de dicho paralelogramo cuyo origen es el de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



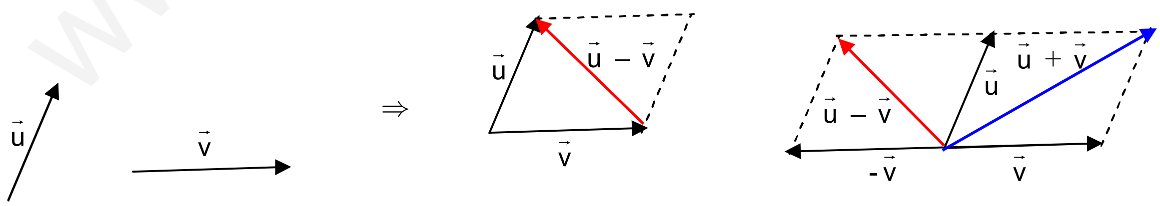
Propiedades de la suma:

- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{0}+\vec{v} = \vec{v} \ \forall \ \vec{v} \in V_2$
- Elemento opuesto: $(-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$

2.2. RESTA DE VECTORES

Para restar dos vectores $\vec{u}-\vec{v}$ se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$:

$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$$



- La diagonal cuyo origen es el origen común de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u}+\vec{v}$
- La diagonal que va del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$ es $\vec{u}-\vec{v}$

2.3. PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO.

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u}$:

- Con la misma dirección de $\vec{u}$
- Con el mismo sentido, si k > 0, o sentido contrario si k < 0.
- Su módulo es igual a |k| · $|\vec{u}|$

Propiedades del producto:

- Asociativa respecto al producto de escalares: $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{u}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{u} \quad \forall\vec{u}\in V_3, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- Distributiva del producto respecto a la suma en V: $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v} \quad \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3, \forall\alpha\in\mathbb{R}$
- Distributiva del producto respecto a la suma en $\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)\cdot\vec{u} = \alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u} \quad \forall\vec{u}\in V_3, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- Elemento Neutro: $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$, $\forall\vec{u}\in V_3$

2.4. COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Un vector $\vec{v}$ se dice que es ***combinación lineal*** de los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ si se puede expresar de la forma:

$$\vec{v} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\cdot\vec{u}_n, \text{ siendo } \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in\mathbb{R}$$

Las posibles operaciones que pueden realizarse entre los elementos de un conjunto de vectores $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n)$ se reducen a la suma y al producto por un escalar. Además, el resultado de combinarlas es siempre un vector.

2.5. ESPACIO VECTORIAL

Definición: Dado el conjunto de vectores V_3 y el cuerpo de los nº reales, $\mathbb{R}$, consideramos las siguientes operaciones:

1) Suma de vectores:

2) Producto de un escalar por un vector:

Con estas dos operaciones se dice que la terna (V_3, +, · $\mathbb{R}$) es un ***espacio vectorial*** real si las dos operaciones definidas cumplen las propiedades enunciadas anteriormente.

Otras propiedades

De las propiedades anteriores se deducen las siguientes:

1) $\alpha\cdot\vec{0} = \vec{0} \quad \vec{0}\in V, \forall\alpha\in\mathbb{R}$
2) $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$, $\forall\vec{u}\in V$
3) Si $\alpha\cdot\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ó $\alpha = 0 \quad \forall\vec{u}\in V, \forall\alpha\in\mathbb{R}$
4) $-(\alpha\cdot\vec{u}) = (-\alpha)\cdot\vec{u} = \alpha\cdot(-\vec{u})$, $\forall a\in V$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
5) Simplificación de escalares: $\alpha\cdot\vec{u} = \alpha\cdot\vec{v} \rightarrow \vec{u} = \vec{v}$,$\forall\ \alpha\neq 0$
6) Simplificación de vectores: $\alpha\cdot\vec{u} = \beta\cdot\vec{u} \rightarrow \alpha = \beta$,$\forall\ \vec{u}\neq\vec{0}$

3 COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

3.1. VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES O DEPENDIENTES

Definición: Se dice que los vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ son ***linealmente dependientes*** cuando alguno de los vectores es combinación lineal de los demás. Es decir:

$$\vec{0} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\cdot\vec{u}_n \text{, con algún } \lambda_i \neq 0$$

- En caso contrario, se dice que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ son ***linealmente independientes***. Es decir:

$$\vec{0} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\cdot\vec{u}_n \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

3.2. BASES

Definición: Un sistema B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ de un espacio vectorial V es una ***base*** si los vectores de B:

1) Son linealmente independientes
2) Cualquier vector de V, $\vec{v}$, se puede expresar como combinación lineal de estos vectores:

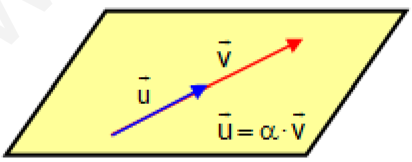
$$\vec{v} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\cdot\vec{u}_n$$

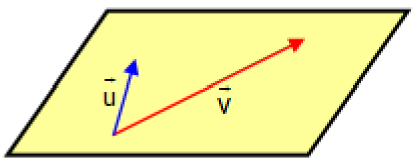
- Los números reales $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ son las ***componentes o coordenadas del vector*** $\vec{v}$ respecto de la base B.
- Una base B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ decimos que es una ***base ortogonal*** cuando $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ son perpendiculares entre sí.
- Dada una base B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ decimos que es una ***base ortonormal*** cuando $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ son perpendiculares entre sí y unitarios.
- Base canónica de V_3: {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

Ejemplo

Trabajando en el espacio V_2:

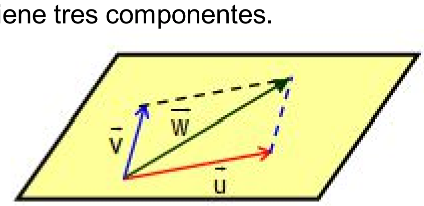
- Dos vectores alineados, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son proporcionales $\rightarrow \vec{u} = \alpha\cdot\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son l.d.
- Dos vectores no alineados, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son l.i, por tanto, forman base.

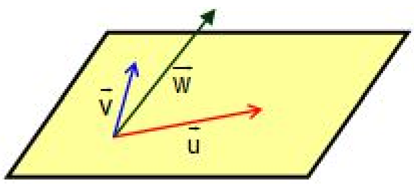




Trabajando en el espacio V_3:

- Tres vectores coplanarios, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es decir, contenidos en el mismo plano, son l.d.
- Tres vectores no coplanarios son l.i., por tanto, forman base. Por ello, cada vector del espacio tiene tres componentes.





4 COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

4.1. SISTEMA DE REFERENCIA

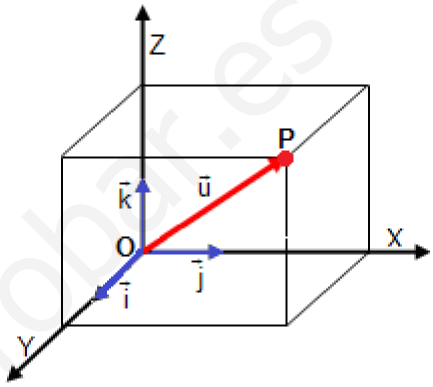
Un ***sistema de referencia*** en el espacio está formado por un punto fijo O y una base B = $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
Se escribe R = $\{O, \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}\}$.

- Al punto O se le llama ***origen*** del sistema de referencia.
- A las semirrectas OX, OY y OZ que contienen a los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ con origen en O, se les llama ***ejes*** del sistema de referencia.

El ***sistema de referencia canónico*** en el espacio es el formado por:

- El origen de coordenadas: O(0, 0, 0)
- La base ortonormal B = $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Se representa por $R \equiv \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$.



El sistema de referencia nos permite asociar a cada punto del espacio P un vector $\overrightarrow{OP}$, llamado ***vector de posición del punto***.

IMPORTANTE: Suma de un punto con un vector

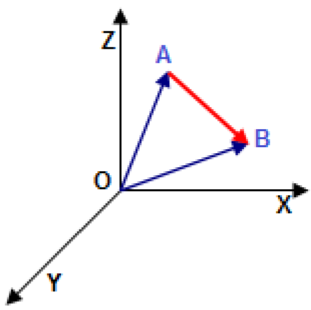
- No se puede sumar un vector $\vec{u}$ a un punto P, es decir, es incorrecto escribir P + $\vec{u}$
- Para sumar un vector $\vec{u}$ a un punto P, se recurre al vector de posición de dicho punto, $\overrightarrow{OP}$: $\overrightarrow{OP} + \vec{u}$

4.2. COORDENADAS DE UN VECTOR DETERMINADO POR DOS PUNTOS

Sean los puntos A = (a_1, a_2, a_3) y B = (b_1, b_2, b_3).

Sus vectores de posición son $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$

- Coordenadas de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$
- Módulo de $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$



4.3. OPERACIONES CON VECTORES USANDO COMPONENTES

- Suma/resta de vectores: Si $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v}(y_1, y_2, y_3)$:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \pm (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3)$$

- Producto de un número real por un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\lambda \vec{v} = \lambda (v_1, v_2, v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

$\lambda \vec{v}$ representa una dilatación (si $|\lambda| > 1$) o una contracción (si $|\lambda| < 1$) del vector $\vec{v}$.

4.4. VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES O DEPENDIENTES

En la práctica, para determinar la dependencia o independencia de un conjunto de n vectores se puede emplear el siguiente resultado:

- El rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ nos determina el número de vectores l.i.

Tres vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ del espacio V_3 son l.i. si se verifica una de las siguientes condiciones:

1) Si $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w} = \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0$

2) $\text{rango}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 3$

- Tres vectores linealmente independientes constituyen una base del espacio V_3, por tanto, cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$\text{Si } B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ base de } V_3 \rightarrow \forall\, \vec{x} \in V_3,\ \vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

Las coordenadas del vector respecto de la base B son: $\vec{x} = (a, b, c)$

Ejemplo

1. Dado el sistema S = {(1,-2,1), (1,-1,0), (-1,-1,2)} :
   a) Demostrar que los vectores son linealmente dependientes.
   b) Expresar uno de los vectores en función de los otros dos.

<u>*1ª forma*</u>: Hay que demostrar que si se verifica la igualdad: $(0,0,0) = \alpha(1,-2,1) + \beta(1,-1,0) + \lambda(-1,-1,2)$ algún coeficiente es distinto de cero.

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta - \lambda \\ 0 = -2\alpha - \beta - \lambda \\ 0 = \alpha + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = \lambda - \alpha \\ 0 = -\alpha - 2\lambda \\ 0 = \alpha + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = \lambda - \alpha = 3\lambda \\ \alpha = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Si } \lambda = 1 \rightarrow \alpha = -2, \beta = 3\,.$$

Por tanto, los tres vectores son l.d.: $(-1,-1,2) = 2(1,-2,1) - 3(1,-1,0)$

<u>*2ª forma*</u>: Estudiar el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F'3=F3+F1]{F'2=F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A = 2 \text{ ya que } F'3 = -3 \cdot F'2$$

También podemos deducir la combinación lineal:

F´3 = -3 · F´2 → F3 + F1 = -3(F2 – F1) → F3 = -3F2 + 2 F1 → (-1,-1,2) = -3 · (1,-1,0) + 2 · (1,-2,1)

2. Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que cualquier vector es combinación lineal de los otros dos? Justifica tu respuesta.

No, sólo podemos asegurar que uno es dependiente con los demás. Por ejemplo: $\vec{u}$ (1, 0, 0) , $\vec{v}$ (1, 2, 3) y $\vec{w}$ (2, 4, 6).

Son vectores linealmente dependientes ya que $\vec{w} = 2\vec{v}$. Sin embargo, el vector $\vec{u}$ no se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.

Ejemplo

1. Dados los vectores $\vec{a}$(1,2, 3), $\vec{b}$(1,2,1), $\vec{c}$(1, 0, 3) y $\vec{d}$(-1,2,1):

a) ¿Forman una base de V_3?

b) Expresar, si es posible, el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los otros tres.

a) Los vectores no pueden formar una base porque el nº de vectores en cualquier base de V_3 es tres.

Para expresar $\vec{b}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, se debe verificar:

$$\vec{b} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{c} + x \cdot \vec{d} \rightarrow (1,2,1) = x(1,2,3) + y(1,0,3) + z(-1,2,1)$$

Matricialmente, debe verificarse:

$$(1,2,1) = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-3F1]{F2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+2z=0 \\ 2z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ y=-1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$

2. Dados los vectores $\vec{a}$(1,1, 3), $\vec{b}$(2,2,-1), $\vec{c}$(0, 1, 0):

a) ¿Forman una base de V_3?

b) Expresar, si es posible, el vector $\vec{d}$(4, -7, 2) como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

a) Para que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ constituyan una base hay que demostrar que son l.i.,

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1-6) = 7 \neq 0 \rightarrow$ rg A = 3 $\rightarrow$ Forman una base de V_3.

b) $\vec{d}$ es combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ si: $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$, siendo x, y ,z nº reales

(4, -7, -2) = x · (1,1, 3) + y · (2,2,-1) + z · (0, 1, 0)

$$\left.\begin{array}{r} 4 = x+2y \\ -7 = x+2y+z \\ -2 = 3x-y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ z=-11 \\ -7y=-14 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 4-2y \rightarrow x=0 \\ z=-11 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \vec{d} = 0\cdot\vec{a} + 2\vec{b} - 11\vec{c}$$

5 PRODUCTO ESCALAR

Definición: Se llama ***producto escalar*** de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\vec{v})$$

5.1. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

1) $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$

2) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. El recíproco no es cierto.

Ejemplo: $\vec{u} = (1,0,0)$ y $\vec{v} = (0,1,0) \Rightarrow \alpha(\vec{u},\vec{v}) = 90º \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) $|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

4) *Propiedad conmutativa:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

5) *Propiedad asociativa:* $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

6) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

7) *Criterio de perpendicularidad*: La condición necesaria y suficiente para que el producto escalar de dos vectores no nulos sea igual a 0 es que los dos vectores sean perpendiculares:

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{0},\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si y sólo si } \vec{u} \perp \vec{v}$$

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) > 0 \Rightarrow 0 < \alpha(\vec{u},\vec{v}) < 90º$
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) < 0 \Rightarrow \Rightarrow 90º < \alpha(\vec{u},\vec{v}) < 180º$

5.2. EXPRESIÓN ANALÍTICA

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

5.3. APLICACIONES

5.3.1. Módulo de un vector

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} \rightarrow |\vec{u}|^2 = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3 \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

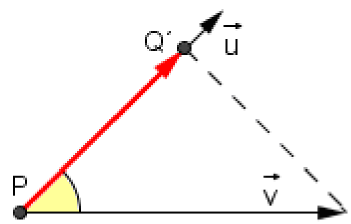
5.3.2. Ángulo de dos vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

5.3.3. Interpretación geométrica

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Vector de proyección $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$: $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$



Si proyectamos el vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, obtenemos el módulo del vector $\overrightarrow{PQ'}$:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|\overrightarrow{PQ'}|}{|\vec{v}|} \rightarrow |\overrightarrow{PQ'}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}| \cdot \underbrace{|\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u},\vec{v})} = |\vec{u}| \cdot |\overrightarrow{PQ'}| = |\vec{u}| \cdot \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$$

Ejemplos

1. Dado los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,-1,1)$, determinar:

   a) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$

   b) El ángulo que forman.

   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1$

   b) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow (\vec{u},\vec{v}) = 120^\circ$

2. Dados los vectores $\vec{a}\,(1,2,3)$, $\vec{b}\,(1,2,1)$, hallar

   a) El módulo de cada vector.

   b) El ángulo que forman.

   c) La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

   a) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

   b) $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{8}{2\sqrt{21}} = \dfrac{4}{\sqrt{21}} \rightarrow \alpha = 29^\circ 12' 21''$

   c) La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ se calcula teniendo en cuenta la definición del producto escalar:

   $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{proy}\left(\vec{a} \text{ sobre } \vec{b}\right) \rightarrow \text{proy}\left(\vec{a} \text{ sobre } \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{8}{\sqrt{6}}\,u$

3. Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (0,x,-1)$. Halla el valor de x, para que el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 60º.

   Para que el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 60º, imponemos que el coseno del ángulo que forman sea $\dfrac{1}{2}$.

   $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+1} = 2x \rightarrow 2(x^2+1) = 4x^2 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ ó $x = -1$

   Para $x = 1 \rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ Para $x = -1 \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$ (no válido)

4. Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas $\vec{u} = (1,2,1)$.

   Sea $\vec{v} = (x, y, z)$ el vector a determinar.

   El vector $\vec{v} \perp \vec{u}$, por tanto se verifica, $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$, es decir, $x + 2y + z = 0$.

   Un vector que cumple esta condición es $\vec{v} = (-1, 1, -1)$.

   Para obtener un vector de módulo 1 dividimos el vector $\vec{v}$ por su módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$

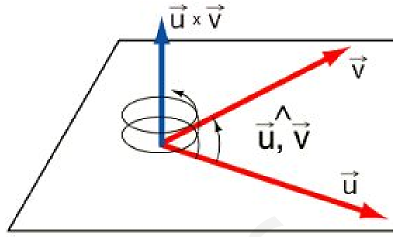
   Por tanto un vector unitario que cumple esta condición es:

   $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6 PRODUCTO VECTORIAL

Definición: Se llama ***producto vectorial*** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se designa $\vec{u} \times \vec{v}$ ó $\vec{u} \wedge \vec{v}$, a otro vector que tiene:

- *Módulo*: $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})$
- *Dirección*: perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- *Sentido*: avance de un sacacorchos cuando va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto.



6.1. PROPIEDADES

1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

2) Asociativa del producto por escalares: $(k \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = k \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$

3) Distributiva respecto de la suma $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

4) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Las demostraciones son fáciles teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes.

6.2. EXPRESIÓN ANALÍTICA

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

6.3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

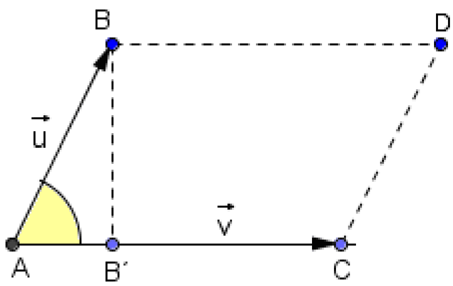
El módulo del producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al área del paralelogramo que determinan.

Sea el paralelogramo, proyectamos el punto B sobre el lado AC.

Teniendo en cuenta el triángulo ABB´, se verifica:

$$\operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\overrightarrow{BB'}|}{|\vec{u}|} \rightarrow |\overrightarrow{BB'}| = |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})$$

Multiplicando por $|\vec{v}|$: $|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{BB'}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = \left|\vec{v} \times \vec{u}\right| =$ Área



Consecuencia: Área de un triángulo

El área del triángulo ABC viene dada por la fórmula: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Ejemplos

1. Dados los vectores $\vec{u}\,(1,0,1)$ y $\vec{v}\,(2,-1,-2)$, determinar un vector $\vec{w}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y, además, sea unitario.

a) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} \rightarrow \vec{w} = (1,0,-1)$$

b) $|\vec{w}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Para que sea unitario consideramos el vector $\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. a) Halla el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}\,(3, -1, 1)$ y a $\vec{v}\,(1, -2, 0)$.

b) ¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por el módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1 + 5^2} = \sqrt{30} \rightarrow \text{Área} = \sqrt{30}\ u^2$$

b) Es falso. Por ejemplo: $\vec{u}\,(1, 0, 0)$, $\vec{v}\,(0, 1, 0)$ y $\vec{w}\,(0, 1, 1)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (0, 0, 1) \times (0, 1, 1) = (-1, 0, 0)$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (1, 0, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

3. a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}\,(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}\,(3, 0, -1)$.

a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

Empleando la propiedad distributiva respecto de la suma $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{u} + (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{v} = \underbrace{\vec{u} \times \vec{u}}_{\vec{0}} \underbrace{- \vec{v} \times \vec{u}}_{\vec{u} \times \vec{v}} + \vec{u} \times \vec{v} - \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{\vec{0}} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$:

$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 1) \times (3, 0, -1) = (1, 5, -3)$

7 PRODUCTO MIXTO

Definición: Dado los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ del espacio, se define el ***producto mixto*** de los tres vectores como:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

7.1. EXPRESIÓN ANALÍTICA

Sean $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2, v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2, w_3)$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Consecuencia: Condición de coplanarios: $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0$

7.2. PROPIEDADES

1) El producto mixto de tres vectores no se altera si se permutan circularmente los factores:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right]=\left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$$

2) El producto mixto cambia de signo si los factores se trasponen de la expresión anterior:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=-\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right]=-\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right]=-\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]$$

3) El producto mixto cumple la siguiente relación respecto al producto por un escalar:

$$\left[a\cdot\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},a\cdot\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},a\cdot\vec{w}\right]=a\cdot\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$$

4) El producto mixto es distributivo respecto de la suma de vectores:

$$\left[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]+\left[\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\right]$$

5) El producto mixto es cero si, y sólo si, los tres vectores son linealmente dependientes:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0\leftrightarrow\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}\text{ l. d.}$$

7.3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores representa el volumen del paralelepípedo que determinan.

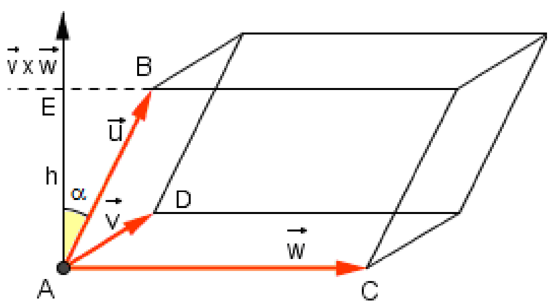
Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overline{AB}$; $\overline{AC}$ $\overline{AD}$

Volumen = $\left|\left[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right]\right|$

Área base = $\left|\overline{AD}\times\overline{AC}\right|$ Altura = h = $\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos\alpha$

Volumen = Área base x altura

Volumen = $\left|\overline{AD}\times\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\left[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right]\right|$



Consecuencia: Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres vectores cualesquiera que lo definan: $V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right]\right|$

Ejemplos

1. Dados los vectores $\vec{u}$ (2, -3, 1), $\vec{v}$ (-3, 1, 2) y $\vec{w}$ (1, 2, 3), calcula:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v}+\vec{w})$ c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ d) $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$

a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}$

b) $\vec{u} \times (\vec{v}+\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -18\vec{i}-12\vec{j}$

c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7+14-21=-14$

d) $[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 14$

2. Prueba que los vectores $\vec{u}$ (1, 1, 1), $\vec{v}$ (3,1,-1) y $\vec{w}$ (-4,2,8) son linealmente dependientes.

Para que sean linealmente dependientes se tiene que verificar $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 10-20+10=0$$

3. Hallar un vector $\vec{a}$ que sea ortogonal al vector $\vec{u}$ (3,-2,5) y que sea coplanario con los vectores $\vec{v}$ (1,-1,3) y $\vec{w}$ (-2,2,1)

Sea $\vec{a}$ (x,y,z)

a) Si $\vec{a} \perp \vec{u} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{u}=0 \rightarrow 3x-2y+5z=0$

b) Si $\vec{a}$ es coplanario con $\vec{v}$ y $\vec{w}$ $\rightarrow \{\vec{a},\vec{v},\vec{w}\}$ son L. D $\rightarrow [\vec{a},\vec{v},\vec{w}] = 0 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7x-7y=0 \rightarrow x+y=0$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow$ Sus soluciones son $(\lambda,-\lambda,-\lambda)$

4. a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$ (2,-1,1), $\vec{v}$ (3,0,-2) y $\vec{w}$ (2,-3,0).

b) Hallar el valor de los siguientes productos mixtos: $[2\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ $[\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}]$

a) El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9+4-12=-17 \rightarrow \text{Volumen} = 17\ u^3$$

b) $[2\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 2\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -34$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{u}]+[\vec{u},\vec{v},\vec{v}] = 0+0=0$

EJERCICIOS

1. Dependencia lineal de vectores

1.1. Determina si son l.i. o no los vectores de los siguientes conjuntos:

a) $\vec{a}\,(1, 2, 3)$, $\vec{b}\,(3, 0, 1)$ y $\vec{c}\,(2, 2, 2)$ b) $\vec{a}\,(4, 7, -4)$, $\vec{b}\,(-1, 2, 1)$ y $\vec{c}\,(-2, -1, 2)$

1.2. Dados los vectores $\vec{u}\,(-5, 8, -3)$, $\vec{v}\,(-1, 2, 1)$, $\vec{w}\,(1, -1, 3)$:

a) Expresa $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}\,(-1, 2, 1)$, $\vec{w}\,(1, -1, 3)$:

b) Dado el vector $\vec{x}\,(5, -6, m)$, determina m para que $\vec{x}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

<u>*Solución*</u>: m = 1

1.3. Se consideran los vectores $\vec{a}\,(3, 1, 0)$, $\vec{b}\,(1, 4, 0)$ y $\vec{c}\,(0, 5, 3)$

a) Razonar que forman una base de V_3.

b) Hallar las coordenadas de $\vec{d}\,(7, 0, 3)$ en la base anterior.

<u>*Solución*</u>: $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

1.4. a) Hallar el valor de k para que $\vec{u}\,(1, 2, -1)$, $\vec{v}\,(0, 1, 2)$, $\vec{w}\,(-1, k, 3)$ sean linealmente dependientes

b) Obtener, en ese caso, una relación de dependencia entre los tres vectores.

1.5. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,0,0) y B(0,1,0). Las coordenadas del centro M son M(0,0,1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D. Dibujar la situación.

<u>*Solución*</u>: C = (-1, 0, 2), D = (0,-1, 2)

2. Producto escalar

2.1. Dados los vectores $\vec{u} = (0, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{w} = (-4, 1, 1)$, efectúa las operaciones:

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$ b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$ c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$ d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

<u>*Solución*</u>: a) -3, b) 0, c) 12, d) 0

2.2. Calcular el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $|\vec{v}| = 2$ y el ángulo que forman $\alpha = 30º$.

<u>*Solución*</u>: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{6}$

2.3. Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -1$ y $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2$, calcula estas operaciones:

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})$ b) $-\vec{w}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$ c) $3\vec{w}\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$ d) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{w})$

<u>*Solución*</u>: a) -3, b) 0, c) 12, d) 0

2.4. Hallar el ángulo que forman estos vectores:

a) $\vec{u} = (-2, 3, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$ b) $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, -1, -1)$

<u>*Solución*</u>: a) 53, 96º b) 124,54º

2.5. a) Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, -1)$ y $\vec{w} = (7, -2, 1)$ realiza las operaciones posibles y explica por qué no se puede hacer el resto.

a.1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}$ a.2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ a.3) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$

b) Demuestra que se verifica la propiedad: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

2.6. ¿Qué valores debe tomar t para que los vectores $\vec{u} = (3, t, 5)$ y $\vec{v} = (2, -7, t)$ sean perpendiculares? ¿Y para que sean paralelos?

2.7. Calcula los vectores perpendiculares a éstos:

a) $\vec{u}$ = (1, 0, 0) b) $\vec{v}$ = (1, 1, 0) c) $\vec{w}$ = (1, 1, 1)

2.8. a) Calcula dos vectores unitarios paralelos al vector $\vec{u}$ = (3, -5, 2).

b) Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector $\vec{u}$ = (1, 2, 1)

2.9. Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y que ambos vectores son perpendiculares, calcular el producto escalar: $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

2.10. ¿Cuánto debe valer m para que los puntos A(5, m, 7), B(3, -1, 4) y C(6, 5, 4) formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en B?

2.11. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo solo son iguales cuando sus lados son perpendiculares. Utiliza el resultado que afirma que si los lados de un paralelogramo son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces las diagonales son $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

3. Producto vectorial

3.1. Sabiendo que $\vec{u}$ = (-1, 1, 0), $\vec{v}$ =(-1,0,1) y el ángulo que forman es $\alpha = 60°$

a) Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$

b) Halla el área del paralelogramo que forman.

Solución: a) (1,1,1) , b) $\sqrt{3}$

3.2. Si $\vec{u}$ = (-1, 4, 2), $\vec{v}$ = (-3, 1, 6) y $\vec{w}$ = (3, 3, -1), calcula:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ c) $2\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w}$

Solución: a) (22,0,11) , b) (42, -10, 41) , c) (-21, 23,-8)

3.3. Si $\vec{u}$ = (0, -1, 0), $\vec{v}$ = (-1,-2,0) y $\vec{w}$ = (-4, 1, 1), calcula:

a) $\vec{u} \times (\vec{w} - \vec{v})$ b) $-\vec{u} \times (2\vec{w} + \vec{v})$ c) $3\vec{u} \times (-2\vec{w} + \vec{v})$ d) $(2\vec{w} + \vec{v}) \times (-\vec{u})$

Solución: a) (-1,0,-3), b) (2,0,9), c) (6,0,21), d) (-2,0,-9)

3.4. Si $\vec{u}$ = (2, -1, 1) y $\vec{v}$ = (1, -2, -1), se pide:

a) Ángulo que forman (Sol: 60º)

b) Un vector perpendicular a ambos.

c) Hallar el valor de m para que el vector $\vec{w}$ = (2, m, -4) sea perpendicular a $\vec{v}$.

3.5. Dados $\vec{u}$ = (-1, 2, 1) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0):

a) Hallar a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares a $\vec{w}$ = (a, 2, b) (sol: a = -2, b = 6)

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (sol: 73º 13´17´´)

c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{x}$ = (-1, 1, 0) y unitario. (sol: -*√3/3,-√3/3,√3/3)*

3.6. Empleando las propiedades de los determinantes, demuestra:

a) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

3.7. Calcula, usando el producto vectorial, el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (4,−1,3) y $\vec{v}$ = (3,0,2).

3.8. Encuentra dos vectores que tengan módulo 5 y que sean perpendiculares a los vectores:

$\vec{u}$ = (2, 0, -1) y $\vec{v}$ = (1,1,0)

3.9. Encuentra el vector normal al plano que pasa por:

a) A(1, 1, 1) B(3, 1, 0) C(-1, 0, 1) b) A(0, 0, 0) B(2, 2, 2) C(0, 1, -2)

Solución: a) (-1,2,-1), b) (-6,4,2)

3.10. Consideramos un paralelogramo de vértices consecutivos A(1,1,0), B(-1,-1,-1), C(2,2,0), hallar:

a) Coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo. *(Solución: D(4,4,1))*

b) Área de este paralelogramo. *(Solución: $S_{ABCD}=\sqrt{2}\ u^2$)*

3.11. Halla el área encerrada en los triángulos cuyos vértices son:

a) *A*(0, 0, 0) *B*(−1, 2, 1) *C* (−1, −1, −1) b) *A*(3, 0, 0) *B*(0, 2, 0) *C* (0, 0, 1)

Solución: a) $\frac{\sqrt{14}}{2}$, b) $\frac{7}{2}$

3.12. Considerar el triángulo de vértices A(1,0,2), B(2,2,2) y C(3,-1,2)

a) Hallar su área.

b) Hallar el ángulo correspondiente al vértice A

Solución: a) 5/2 u^2, b) 90º

4. Producto mixto

4.1. Calcula el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$, siendo los vectores:

a) $\vec{u}$ = (0,1,0), $\vec{v}$ = (1,1,1) y $\vec{w}$ = (0,0,-1) b) $\vec{u}$ = (3,8,0), $\vec{v}$ = (0,-1,3) y $\vec{w}$ = (-5,4,0)

c) $\vec{u}$ = (0,4,2), $\vec{v}$ = (-2,7,1) y $\vec{w}$ = (5,-2,1) d) $\vec{u}$ = (0,4,2), $\vec{v}$ = (5,-2,1) y $\vec{w}$ = (-2,7,1)

e) $\vec{u}$ = (9,4,1), $\vec{v}$ = (-1,5,-11) y $\vec{w}$ = (12,6,0) f) $\vec{u}$ = (1,3,2), $\vec{v}$ = (2,-2,0) y $\vec{w}$ = (3,1,2)

4.2. Demuestra, utilizando las propiedades de los determinantes, que para k, $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ se verifica que:

$$\left[k\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{u},k\vec{v},\vec{w}\right]=k\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$$

4.3. a) Dado el vector $\vec{u}$ = (3,-5,2), comprueba $\left[\vec{u},\vec{v},2\vec{u}-\vec{v}\right]=0$ para cualquier vector $\vec{v}$.

b) Razona por qué $\left[\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right]=0\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

4.4. Explica por qué para cualesquiera $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\left[\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w},-3\vec{u}+5\vec{v},-2\vec{u}+7\vec{v}-\vec{w}\right]=0$

4.5. Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores:

a) $\vec{u}$ = (-2,0,0), $\vec{v}$ = (3,2,1) y $\vec{w}$ = (-2,0,4) b) $\vec{u}$ = (-1,-1,-1), $\vec{v}$ = (1,1,1) y $\vec{w}$ = (0,0,2)

4.6. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son A = (0,0,0), B = (0,0,1), C(0,2,0) y D = (3,0,0)

4.7. Dados los puntos A = (1,-2,0), B = (-2,4,4,) y C = (3,-1,-1), se pide:

a) Hallar un vector ortogonal a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (sol: (2,-1,3))

b) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (sol: 102º 4´7´´)

c) Hallar el área del triángulo determinado por los tres puntos.

d) Hallar el volumen del tetraedro de vértices los tres punts y el origen.

4.8. Dados los vectores $\vec{u}$ = (a,2,3), $\vec{v}$ = (3,2,a) y $\vec{w}$ = (a,-2,1), se pide:

a) Hallar a para que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (sol: a = 1)

b) Hallar a para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios (sol: a = -2, a = 3)