1 SISTEMA DE REFERENCIA. COORDENADAS DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

Para localizar un punto o un objeto en el espacio necesitamos un sistema de referencia.

Definición: Un ***sistema de referencia*** en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una cuaterna $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ formada por:

- Un punto fijo O que se llama origen del sistema.
- Una base de vectores $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de módulo 1 (unitarios) y perpendiculares entre sí (ortogonales).

Los tres vectores de la base determinan con el origen unos ***ejes de coordenadas***: OX, OY y OZ.

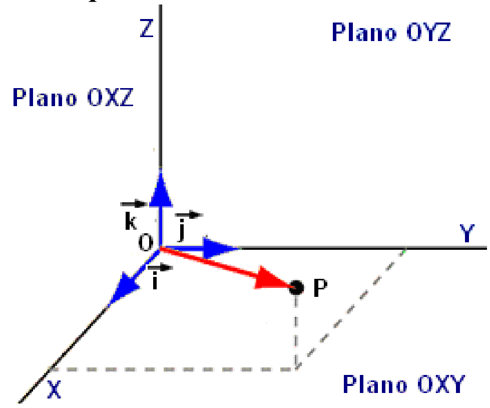
A cada punto P del espacio le asociamos el vector $\overrightarrow{OP}$, llamado ***vector de posición*** de P respecto del punto fijo O.

Además determinan tres planos OXY, OXZ, OYZ, que se denominan ***planos cartesianos*** del sistema.

Todo punto de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P(x, y, z) \text{ si } \overrightarrow{OP} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

Las coordenadas del punto P coinciden con las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto a la base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

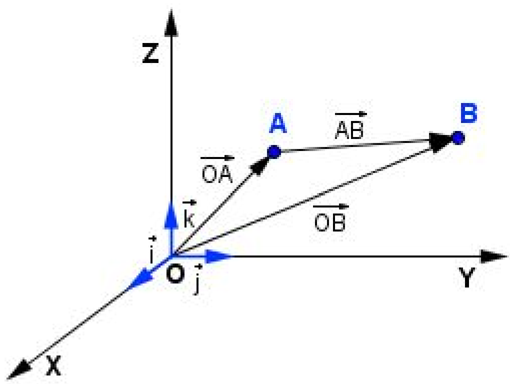


1.1. Coordenadas de un vector dado dos puntos.

Dados los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$,

las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



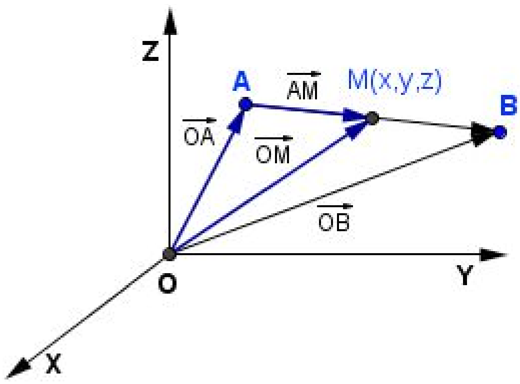
1.2. Coordenadas del punto medio de un segmento.

Dados los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$.
Sea M el punto medio de un segmento AB.
Se verifica:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right)$$

Las coordenadas del ***punto medio de un segmento*** son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



1.3. Punto simétrico de un punto respecto de otro dado.

El ***punto simétrico*** de un punto P respecto de otro punto M es el punto P´ que verifica que M es el punto medio del segmento PP´.

Sean los puntos $P(x,y,z)$ y $M(m_x, m_y, m_z)$.

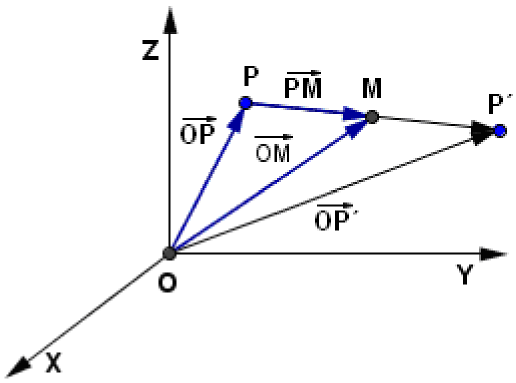
Consideremos el punto $P´(x´, y´, z´)$ el simétrico de P respecto de M.

Se verifica: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PM}$

$(x´, y´, z´) = (x, y, z) + 2\,(m_x - x,\ m_y - y,\ m_z - z)$

Igualando componentes se obtiene:

$x´ = 2\,m_x + x$; $y´ = 2\,m_y + y$; $z´= 2m_z + z$



Ejemplo

1. Calcular el punto simétrico de P(2,-1,3) respecto del punto M(-1,-2,4)

Sea P´(x,y,z) el punto simétrico de P. Se verifica:

$$\overrightarrow{PP'} = 2\cdot\overrightarrow{PM} \rightarrow (x-2,\ y+1,\ z-3) = 2(-3,-1,1) \rightarrow \begin{cases} x-2=-6 \rightarrow x=-4 \\ y+1=-2 \rightarrow y=-3 \\ z-3=2 \rightarrow z=5 \end{cases} \rightarrow P´(-4,-3,5)$$

2 ECUACIONES DE LA RECTA

Al igual que ocurre en el plano, una **recta** en el espacio queda determinada conociendo un punto P y un vector no nulo $\vec{u}$ que se llama ***vector director*** de la recta.

Estudiamos a continuación las diferentes formas que puede adoptar la ecuación de una recta.

1) Ecuación vectorial

Una recta r queda determinada por:

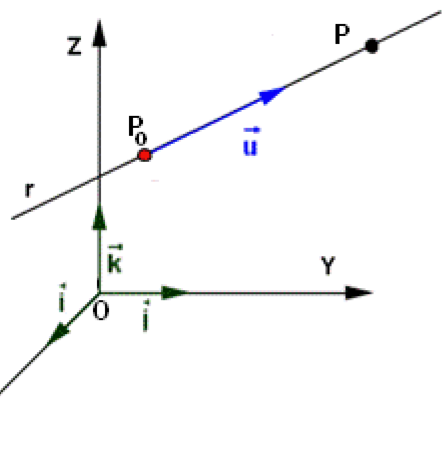
- Un punto $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$ de la recta.
- Un vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ cuya dirección es la recta.

Consideremos un punto cualquiera de la recta $P(x, y, z)$

El vector $\overrightarrow{P_0P}$ tiene que tener la misma dirección que el vector $\vec{u}$, es decir, debe ser proporcional a $\vec{u}$:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} \rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u}$



ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u}$ con $t \in \mathbb{R}$, cuya expresión en coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x_0,y_0,z_0) + t\cdot(u_1, u_2, u_3)$$

2) Ecuaciones paramétricas

Partiendo de la ecuación vectorial de la recta: $(x, y, z) = (x_0,y_0,z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3)$

Igualando coordenadas, obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Observaciones:

a) Dando valores a t obtenemos puntos de la recta.

b) Al sustituir las coordenadas de un punto de la recta en las ecuaciones paramétricas, se obtiene el mismo valor de t para las tres ecuaciones.

3) Ecuación en forma continua

Considerando las ecuaciones paramétricas, despejamos t en cada una de ellas e igualando, obtenemos las ecuaciones de la recta que no dependen de ningún parámetro

$$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

Observaciones:

a) Todo punto que verifique las tres igualdades pertenece a la recta, y viceversa.

b) La forma continua no se puede emplear si alguno de los denominadores es 0.

4) Ecuaciones implícitas

Operando dos a dos en la forma continua obtenemos las ecuaciones implícitas (intersección de dos planos):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} \to u_2(x-x_0) = u_1(y-y_0) \to u_2x - u_1y + (u_1y_0 - u_2x_0) = 0 \\ \dfrac{y-y_0}{u_2} = \dfrac{z-z_0}{u_3} \to u_3(y-y_0) = u_2(z-z_0) \to u_3y - u_2z + (u_2z_0 - u_3y_0) = 0 \end{array}\right\} \to r: \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

5) Incidencia punto y recta

Un punto $P_1\ (x_1,y_1,z_1)$ pertenece a la recta $r: < P_0 + t\cdot\vec{u} >$ si y, sólo si:

a) $P_1 \in r \Leftrightarrow$ el sistema $\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot u_1 \\ y_1 = y_0 + t \cdot u_2 \\ z_1 = z_0 + t \cdot u_3 \end{cases}$ es compatible $\Leftrightarrow \left\{ \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{u} \right\}$ son l.d.

b) $P_1 \in r \Leftrightarrow$ las coordenadas del punto P_1 verifican las ecuaciones de la recta (i.e., se obtiene el mismo valor de t para las tres ecuaciones)

6) Condición para que tres puntos estén alineados

Dados tres puntos $A(a_1, a_2, a_3)$,$B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ están alineados si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes. Es decir:

A, B y C alineados $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ son l.d. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ proporcionales $\Leftrightarrow \text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 1$

Ejemplos

1) Comprobar si los siguientes puntos están alineados: A(0,1,1), B(-1,-1,4) y C(3,7,-8)

$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,3)$; $\overrightarrow{AC} = (3,6,-9)$

$\overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ proporcionales $\rightarrow$ A, B y C están alineados.

2) Comprobar si los siguientes puntos P = (1, 3, -5) y Q = (3, 4, -4) pertenecen a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Sustituyendo las coordenadas en la ecuación:

a) $r \equiv \begin{cases} 1 = -1 + 2t \rightarrow t = 1 \\ 3 = 2 + t \rightarrow t = 1 \\ -5 = -2 - t \rightarrow t = 3 \end{cases} \rightarrow P \notin r$ (obtenemos diferentes valores de t)

b) $r \equiv \begin{cases} 3 = -1 + 2t \rightarrow t = 2 \\ 4 = 2 + t \rightarrow t = 2 \\ -4 = -2 - t \rightarrow t = 2 \end{cases} \rightarrow Q \in r$ (obtenemos el mismo valor del parámetro t)

3) Dadas las siguientes rectas, determina dos puntos de cada una y un vector director:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ b) $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{1}$

a) P = (1,-2,3) (dado por el término independiente de cada ecuación)

Dando valores a t, obtenemos diferentes puntos. Si t = 1: Q = (2, 0, 2)

Vector director: (1, 2, -1) (coeficientes de t en cada ecuación)

b) P = (-1, 1, -2) (cambiando de signo el término independiente de cada numerador)

Pasando a forma paramétrica: $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ Para t = 1: Q = (1, 4, -1)

Vector director: (2, 3, 1) (viene dado por los denominadores)

4) Dada la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3y + z - 9 = 0 \end{cases}$ obtener su ecuación en forma paramétricas:

Resolvemos el sistema para obtener la expresión paramétrica de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3y + z - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2y + 3 \\ z = -3y + 9 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 9 - 3\lambda \end{cases}$$

Ejemplos

5) Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas de cada uno de los ejes de coordenadas.

- Vectorial: Eje OX : $\vec{x} = t \cdot \vec{i}$; Eje OY : $\vec{y} = t \cdot \vec{j}$; Eje OZ : $\vec{z} = t \cdot \vec{k}$
- Paramétricas:

$$\text{Eje OX}: \begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OY}: \begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 + \alpha \cdot t \\ z = 0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OZ}: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z_0 + \alpha \cdot t \end{cases}$$

- Continua:

$$\text{Eje OX}: \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} ; \quad \text{Eje OY}: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} ; \quad \text{Eje OZ}: \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

- Implícitas:

$$\text{Eje OX}: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OY}: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OZ}: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

6) Expresar en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (2,1,-3)

- Ecuación vectorial: (x, y, z) = (1,2,3) + t · (2,1,-3)
- Ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

- Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$
- Ecuaciones implícitas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x - 1 = 2y - 4 \rightarrow x - 2y + 3 = 0 \\ \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-3} \rightarrow -3y + 6 = z - 3 \rightarrow 3y + z - 9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

3) Halla las ecuaciones en forma paramétricas y continua de la recta r: $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$

Para obtener la forma paramétricas resolvemos el sistema que es compatible indeterminado

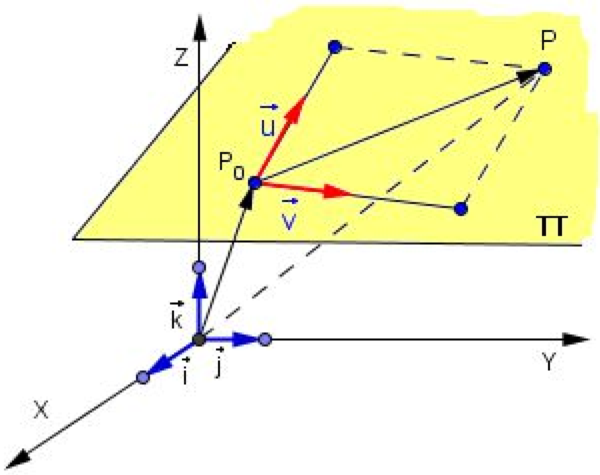
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 - z \\ x - y = 1 + 2z \end{cases} \rightarrow 3x = 4 + z \rightarrow z = 3x - 4$$

Sustituyendo en E1: 2x + y = 3 – z → y = 3 – z – 2x = 3 – 3x + 4 – 2x = 7 – 5x

- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ → Punto de r: P(0,7,-4) y vector director $\vec{u}$ = (1,-5, 3)
- Forma continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-7}{-5} = \dfrac{z+4}{3}$

3 ECUACIONES DEL PLANO

Para determinar un plano del espacio se necesita conocer un punto P_0 y un par de vectores que formen una base, es decir, que sean linealmente independientes.



Consideramos:

- Un punto $P_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ del plano.
- Dos vectores directores: $\vec{u}(u_1,\ u_2,u_3)$; $\vec{v}\,(v_1,\ v_2,v_3)$

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano.

Se verifica:

- $\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ + s, siendo t, s $\in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$

1) Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ con t, s $\in \mathbb{R}$

Expresada en coordenadas es:

$(x, y, z) = (x_0,y_0,z_0) + t \cdot (u_1,\ u_2,u_3)) + s \cdot (v_1,\ v_2,v_3)$

2) Ecuaciones paramétricas:

Partiendo de la ecuación vectorial e igualando coordenadas, obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot u_1 + s\cdot v_1 \\ y = y_0 + t\cdot u_2 + s\cdot v_2 \\ z = z_0 + t\cdot u_3 + s\cdot v_3 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}$$

Observaciones:

a) Dando valores a t y s obtenemos puntos de la recta.

b) Al sustituir las coordenadas de un punto de la recta en las ecuaciones parmétricas, se obtiene el mismo valor de t y s para las tres ecuaciones.

3) Ecuación general o implícita:

Como se verifica que $\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ → los tres vectores son linealmente dependientes, por tanto,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & u_1 & v_1 \\ y-y_0 & u_2 & v_2 \\ z-z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar este determinante obtenemos una expresión de la forma: $Ax + By + Cz + D = 0$

4) Ecuación normal del plano.

Sea el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano π.

El vector $\overrightarrow{PQ}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ pertenece al plano π.

Como P y Q son dos puntos del plano verifican su ecuación. Por tanto, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \end{array}\right\} \rightarrow A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \rightarrow (A, B, C)\cdot\overrightarrow{PQ}=0$$

- El vector (A, B, C) es ortogonal a cualquier vector del plano π, se denomina ***vector normal*** al plano.

De esta forma, se puede caracterizar un plano con solo un punto y un vector ortogonal a él. Es decir:

Determinación normal del plano π:

Sea el vector $\vec{n}$ (A, B, C) perpendicular al plano y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano π.

La ecuación del plano se puede determinar de varias formas:

1) El plano es: $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ donde D se determina imponiendo que el punto P debe verificar la ecuación del plano

2) El plano es $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

5) Ecuación del plano que contiene tres puntos

Se consideran los puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ y $C(x_2, y_2, z_2)$.

Determinamos el plano que pasa por el punto A y tiene como vectores de dirección $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, que deben ser linealmente independientes: $\overrightarrow{AB}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ y $\overrightarrow{AC}(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)$

$$\pi \equiv A+<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AC}> \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

6) Condición para que cuatro puntos sean coplanarios

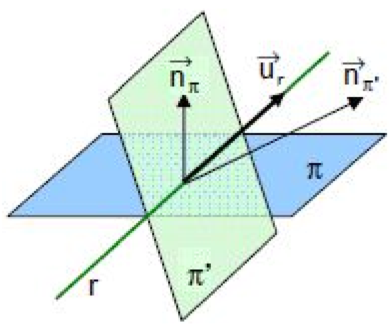
Dados los puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ y $D(x_3, y_3, z_3)$, la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarios es:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AD} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0 \\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0$$

7) ¿Cómo obtener un vector director y un punto de una recta en forma implícita?

Sea $r:\begin{cases} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

- Un vector director de la recta r: $\vec{u}_r=\vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi'}$
- Para determinar un punto de r basta buscarlo por tanteo, sin necesidad de resolver el sistema.



Ejemplos

1) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícita del plano determinado por el punto A(1, -2, 1) y los vectores de dirección $\vec{u}$ (3, 2, 5) y $\vec{v}$ (1, -1, 3).

Los dos vectores son linealmente independientes ya que no son proporcionales: $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{5}{3}$

- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = -2 + 2t - s \\ z = 1 + 5t + 3s \end{cases}$$

- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y+2 & 2 & -1 \\ z-1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11(x-1) - 4(y+2) - 5(z-1) = 0 \rightarrow 11x - 4y - 5z - 14 = 0$$

2) Hallar la ecuación del plano determinado por los puntos A(1, 0, 3), B(-2, 1, 3) y C(-1, 2, 1)

- Calculamos los dos vectores de dirección: $\overrightarrow{AB}$ (-3, 1, 0) ; $\overrightarrow{AC}$ (-2, 2, -2)
- Son linealmente independientes: $\frac{-3}{-2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{-2}$
- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 + 3y + 2(z-3) = 0 \rightarrow x + 3y + 2z - 7 = 0$$

3) Comprobar si el punto P(4, -3, 1) pertenece al plano de ecuación $\pi: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = -3 + 2t + s \end{cases}$

El plano viene determinado por el punto A(1, 2, -3) y los vectores $\vec{u}$ (1, -1, 2) y $\vec{v}$ (1, -2,1)

Para que el punto P pertenezca al plano se tiene que cumplir que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean l.d.

Es decir, $P \in \pi \leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 3 + (-6) = 0$

Una segunda forma, sustituyendo las coordenadas en la ecuación y comprobando que obtenemos el mismo valor de t y s en las tres ecuaciones.

4) Comprobar que los puntos A(1, 2, 3), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1) y D(1, 1, 0) son coplanarios.

Si son coplanarios los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes.

$\overrightarrow{AB}$ (-1, -1, -2) ; $\overrightarrow{AC}$ (0, -2, -2) y $\overrightarrow{AD}$ (0,-1,-3) son l.d. si $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AD} \text{ son l.i.} \rightarrow \text{A, B, C y D no son coplanarios.}$$

5) Dada la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-9=0 \end{cases}$, determina dos puntos de cada una y un vector director:

Por tanteo, obtenemos puntos:

Si z = 0 → $t \equiv \begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y-9=0 \end{cases}$ → P = (3, 3, 0) Si y = 0 → $t \equiv \begin{cases} x+3=0 \\ z-9=0 \end{cases}$ → Q = (-3, 0, 9)

Vector director: siempre es perpendicular a los vectores normales de cada plano.

$$t \equiv \begin{cases} x-2y+3=0 \rightarrow \vec{n}=(1,-2,0) \\ 3y+z-9=0 \rightarrow \vec{n'}=(0,3,1) \end{cases} \rightarrow \text{Vector director: } (1,-2,0)x(0,3,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,3)$$

6) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto P(0,1, 3) y contiene a la recta $r:\begin{cases} x=4t \\ y=5-2t \\ z=2t \end{cases}$

- Todo plano queda determinado por un punto y dos vectores de dirección.
- Vector de dirección de r: $\vec{u}$ (4, -2, 2) Un punto de r: Q(0, 5, 0)
- Otro vector de dirección del plano es $\overrightarrow{PQ}$: (0, 4, -3)
- El plano viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$: $\pi:\begin{cases} x=4t \\ y=1-2t+4s \\ z=3+2t-3s \end{cases}$

7) Calcular la ecuación del plano π, que siendo perpendicular a la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-1}$ pasa por el punto P(-1, -2, 3).

1ª forma: La recta tiene de vector director $\vec{u}$(2, -1, -1) → Vector normal del plano: $\vec{u}$

Ecuación del plano: 2x – y – z + D = 0.

Determinamos D imponiendo que el plano pasa por el punto P: -2 + 2 – 3 + D = 0 → D = 3

El plano es π : 2x – y – z + 3 = 0.

2ª forma: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ → 2(x + 1) – (y + 2) – (z – 3) = 0 →2x – y – z + 3 = 0

8) Calcula las ecuaciones del:

a) Plano que pasa por el origen. b) Plano paralelos a cada eje.

a) Ax + By + Cz = 0

b) Eje OX: By + Cz + D = 0 Eje OY: Ax + Cz + D = 0 Eje OZ: Ax + By + D = 0

9) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(0, 6, 2) y es paralela a las rectas r y s, siendo

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$$

Se reduce a calcular la ecuación que pasa por P y tiene como vectores de dirección los de r y s:

$$\vec{u}_r(0,-1,2) \quad ; \quad \vec{u}_s(1,0,1)$$

Plano: $\begin{vmatrix} x & y-6 & z-2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ → -x + 2(y – 6) + z – 2 = 0 → -x + 2y + z – 14 = 0

4 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

4.1. Ecuaciones en forma implícita

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

Empleamos el teorema de Rouché -Frobenius:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

- Rango (A) = 2 $\rightarrow$ Ambas rectas tienen la misma dirección
  - Rango (A*) = 2 $\rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow$ r y s tienen infinitos puntos en común $\rightarrow$ r y s coincidentes
  - Rango (A*) = 3 $\rightarrow$ S.I. $\rightarrow$ r y s no tienen puntos en común $\rightarrow$ r y s paralelas
- Rango (A) = 3 $\rightarrow$ Ambas rectas tienen distinta dirección
  - Rango (A*) = 3 $\rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow$ r y s tienen un punto en común $\rightarrow$ r y s secantes
  - Rango (A*) = 4 $\rightarrow$ S.I. $\rightarrow$ r y s no tienen puntos en común $\rightarrow$ r y s se cruzan

4.2. Ecuaciones en forma paramétricas o continua

Consideramos las rectas:

- $r:\vec{x}=A+\alpha\vec{u}$, siendo $A(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$
- $s:\vec{x}=B+\lambda\vec{v}$, siendo $B(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$
- Sea $\overline{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

Si existe un punto común a las dos rectas, existiría algún valor de α y λ que serían soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} x_1+\alpha u_1=x_2+\lambda v_1 \\ y_1+\alpha u_2=y_2+\lambda v_2 \\ z_1+\alpha u_3=z_2+\lambda v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha u_1-\lambda v_1=x_2-x_1 \\ \alpha u_2-\lambda v_2=y_2-y_1 \\ \alpha u_3-\lambda v_3=z_2-z_1 \end{cases}$$ sistema donde las incógnitas son α y λ

- Rango $(\vec{u};\vec{v})$ = 1 $\rightarrow$ las rectas tienen la misma dirección.
  - Si rango $(\vec{u};\vec{v};\overline{AB})$ = 1 $\rightarrow$ S.C.I (infinitos puntos en común) $\rightarrow$ r y s son coincidentes.
  - Si rango $(\vec{u};\vec{v};\overline{AB})$ = 2 $\rightarrow$ S.I. (no hay puntos en común) $\rightarrow$ r y s son paralelas.
- Rango $(\vec{u};\vec{v})$ = 2 $\rightarrow$ r y s no tienen la misma dirección
  - Si rango $(\vec{u};\vec{v};\overline{AB})$ = 2 $\rightarrow$ S.C.D. (tienen una solución única) $\rightarrow$ r y s son secantes
  - Si rango $(\vec{u};\vec{v};\overline{AB})$ = 3 $\rightarrow$ S.I. (no hay puntos en común) $\rightarrow$ r y s se cruzan

Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-1+t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=6s \\ y=-1+2s \\ z=1+2s \end{cases}$$

1ª forma: Sean $\vec{u}_r(3,1,1)$ dirección de r ; $\vec{u}_s(6,2,2)$ dirección de s

Ambos vectores son proporcionales, por tanto, ambas rectas tienen la misma dirección.

Comprobamos que el punto A(1, 2, -1)$\in$r no pertenece a la recta s:

$$s:\begin{cases} 1=6s \\ 2=-1+2s \rightarrow s=\dfrac{3}{2} \\ -1=1+2s \rightarrow s=1 \end{cases} \rightarrow A\notin r \rightarrow \text{Las rectas son paralelas}$$

2ª forma: A(1, 2, -1)$\in$r ; B(0,-1,1) $\in$s $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$(-1, -3, 2)

Son paralelas porque $\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$; $\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

2) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=3-3s \\ y=5-2s \\ z=2s \end{cases}$$

Sean $\vec{u}_r(1,-1,2)$ dirección de r ; $\vec{u}_s(-3,-2,2)$ dirección de s

Ambos vectores son linealmente independientes $\rightarrow$ las rectas tienen distinta dirección

Sea A(1, 2, 4)$\in$ r y B(3,5,0) $\in$ s, el vector $\overrightarrow{AB}$(2, 3, -4)

Estudiamos el rango de la matriz:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A^* = 2 \rightarrow \text{Ambas rectas se cortan en un punto}$$

Para determinar las coordenadas del punto, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2=3s+t \\ 3=2s-t \\ -4=-2s+2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2=3s+t \\ 3=2s-t \end{cases} \rightarrow s=1,\ t=-1$$

Llevando uno de estos valores a la ecuación de la recta correspondiente obtenemos las coordenadas del punto de intersección:

Si t = -1, sustituyendo en la ecuación de r obtenemos el punto Q (0,3,2)

Por tanto, r y s se cortan en el punto Q(0,3,2)

Ejemplos

3) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}2x+y=-5\\4x-z=-10\end{cases}\qquad s:\begin{cases}2y-z=-7\\2x-3y=8\end{cases}$$

Estudiamos el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&2&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\4&0&-1&-10\\0&2&-1&-7\\2&-3&0&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\4&0&-1&-10\\0&2&-1&-7\\2&-3&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow[F4=F4-F1]{F2=F2-2F1}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&2&-1&-7\\0&-4&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow[F4=F4-2F2]{F3=F3+F2}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&0&-2&-7\\0&0&2&13\end{pmatrix}\xrightarrow{F4=F4+F3}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&0&-2&-7\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

Luego, rg A* = 4

Por tanto, las dos rectas se cruzan

4) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(0, 3, 2) y corta a las rectas r y s de ecuación:

$$r:\begin{cases}x-y+z=0\\2x+y=3\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x-2y+z=0\\x-2y-z=4\end{cases}$$

- Si las rectas r y s se cortan en un punto, el problema se reduce a determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- Si ambas rectas son paralelas y definen un plano, las rectas que pasan por P son infinitas si el punto está en dicho plano.

Determinamos la posición de r y s, para ello estudiamos el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&1&0&3\\1&-2&1&0\\1&-2&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&1&0&3\\1&-2&1&0\\1&-2&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&3&-2&3\\0&-1&0&0\\0&-1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&3&-2&3\\0&-1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&-2&4\end{pmatrix}\to \text{rg } A=\text{rg } A^*=3$$

Luego ambas rectas se cortan en un punto. Para determinar sus coordenadas resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{cases}x-y+z=0\\y=0\\-2z=4\end{cases}\to\begin{cases}x=-z=2\\y=0\\z=-2\end{cases}\to \text{Punto de intersección: } Q(2, 0, -2)$$

Ecuación de la recta que pasa por P(0, 3, 2) y Q(2, 0, -2) : $\overrightarrow{PQ}$ (2,-3,-4)

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-2}{-4}$$

5 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

5.1. Ecuaciones en forma implícita

Sean $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dos planos del espacio:

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Empleando el teorema de Rouché –Frobenius:

- Rango A = 2 = rango A* < 3→ S.C.I → π_1 y π_2 se cortan en una recta.

  Para hallar sus ecuaciones paramétricas, basta resolver el sistema formado por las dos ecuaciones. En forma implícita la recta viene dada por las ecuaciones de los dos planos.

- Rango A = 1 → π_1 y π_2 son paralelos o coincidentes
  - Si rango A* = 2 → S.I. → π_1 y π_2 son paralelos.
  - Si rango A* = 1 → S.C.I. → π_1 y π_2 son coincidentes.

5.2. Empleando los vectores normales

Sean $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dos planos del espacio:

Consideramos los vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (A_2, B_2, C_2)$

- Si $\vec{n}_{\pi_1}$ y $\vec{n}_{\pi_2}$ no son proporcionales → π_1 y π_2 secantes
- Si $\vec{n}_{\pi_1}$ y $\vec{n}_{\pi_2}$ son proporcionales → π_1 y π_2 son paralelos o coincidentes
  - Si $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ → π_1 y π_2 son paralelos.
  - Si $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ → π_1 y π_2 son coincidentes.

5.3. Haz de planos

- Se llama ***haz de planos*** al conjunto de todos los planos que pasan por una cierta recta denominada arista del haz.

  Supongamos que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta r:

  $$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

  Formando una combinación lineal de las ecuaciones de ambos, obtenemos el haz de planos que contienen dicha recta:

  $$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + k \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

- **Haz de planos paralelos**:

  La expresión Ax + By + Cz + k = 0 representa un haz de infinitos planos paralelos, los cuales se obtienen dando valores a k.

Ejemplos

1) Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, -3) y es paralelo al plano π, cuya ecuación es

$$\pi: 3x - 2y + z - 1 = 0$$

Todo plano paralelo a π es de la forma: $3x - 2y + z + k = 0$

Determinamos k, imponiendo que el plano pasa por P: $3 - 4 - 3 + k = 0 \rightarrow k = 4$

Por tanto, el plano buscado es: $3x - 2y + z + 4 = 0$

2ª forma: Sea $\vec{v}(1, -2, 3)$ vector normal a π: $3(x - 1) - 2(y - 2) + (z + 3) = 0 \rightarrow 3x - 2y + z + 4 = 0$

2) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\pi: 3x - 2y + z = -1 \quad \pi': -6x + 4y - 2z = 4$ b) $\pi: x - y + z = 0 \quad \pi': x - y = 0$

a) Comprobamos la proporcionalidad de sus coeficientes: $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{4} \longrightarrow \pi\,;\,\pi'$ paralelos

b) $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{0} \longrightarrow \pi\,;\,\pi'$ se cortan en una recta

3) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función de los valores del parámetro m:

$$\pi: mx + y - z = 1 \qquad \pi': 2x - y + mz = 3m$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \end{pmatrix}$$

Rg A = 2 porque $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 \neq 0 \ \forall\, m \rightarrow$ Se cortan para cualquier valor de m

4) a) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1: x - y + z = 0 \qquad \pi_2: x - y = 0$$

b) En caso de ser secantes determinar la ecuación en forma paramétrica de la recta.

c) Determinar a ecuación del plano que contiene a la recta y pasa por el punto A(2, 0, -6)

Consideramos los vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (1, -1, 0)$

No son proporcionales $\rightarrow$ Ambos planos tienen distinta dirección $\rightarrow$ se cortan en una recta.

Si dos planos no son paralelos, definen una recta.

La ecuación de la recta es $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x + z = y \\ x = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

El conjunto de planos que contienen a la recta viene dado por una combinación lineal de las dos ecuaciones de la recta expresada en forma implícita:

Ecuación de los planos: $x - y + z + k \cdot (x - y) = 0$

Imponiendo que pasa por A determinamos k: $2 - 6 + 2k = 0 \rightarrow k = 2$

Ecuación del plano: $x - y + z + 2 \cdot (x - y) = 0 \rightarrow 3x - 3y + z = 0$

6 POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Una recta y un plano pueden adoptar las siguientes posiciones: se cortan en un punto, son paralelas o la recta está contenida en el plano.

6.1. Recta en paramétricas y plano en implícita

Consideremos la recta r y el plano π:

- $\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow$ Vector normal : $\vec{n}\,(A, B, C)$
- $r: \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \rightarrow$ Vector de dirección: $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$

1ª forma: Podemos obtener los puntos de intersección de ambos sustituyendo x, y , z en la ecuación del plano, resultando una ecuación con la incógnita t:

$$A(x_0 + tu_1) + B(y_0 + tu_2) + C(z_0 + tu_3) + D = 0$$

1) Si la ecuación tiene solución: la recta y el plano se cortan en un punto.
2) Si no tiene solución: la recta y el plano son paralelos.
3) Si tiene infinitas soluciones: la recta está contenida en el plano

2ª forma:

1) Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ y $P \in \pi$ $\rightarrow$ la recta está contenida en el plano
2) Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ y $P \notin \pi$ $\rightarrow$ la recta y el plano son paralelos
3) Si $\vec{u} \not\perp \vec{n}$ $\rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto.

6.2. Recta y plano en forma implícita

Consideremos la recta r y el plano π:

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \pi: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Empleamos el teorema de Rouché -Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- Rango(A) = 2 = rango(A*) $\rightarrow$ La recta está contenida en el plano
  El sistema es compatible indeterminado. Los tres planos tienen una recta en común
- Rango(A) = 2, rango(A*) = 3 $\rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.
  El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común.
- Rango(A) = rango(A*) = 3 $\rightarrow$ La recta y el plano son secantes.
  El sistema es compatible determinado. Los tres planos tienen un punto en común.

Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = z+3$ y el plano π: 3x + 2y – z = 0

Vector de dirección de la recta: $\vec{u}(2,2,1)$

Vector normal : $\vec{n}(3, 2, -1)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 6 + 4 - 1 = 9 \rightarrow \vec{u} \not\perp \vec{n} \rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto

Determinamos el punto de corte:

Consideramos las ecuaciones paramétricas de la recta $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación del plano: $6t + 2(3 + 2t) - (t - 3) = 0 \rightarrow 6t + 6 + 4t - t + 3 = 0 \rightarrow t = -1$

El punto de corte es P(-2, 1, -4)

2) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ y el plano π: 2x + 3y – z = 1

Hacemos uso del teorema de Rouché -Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2 ya que F2 – F1 = F3

Rango A* = 3 ya que $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3+F1-F2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema es incompatible $\rightarrow$ No hay puntos en común

Por tanto, la recta y el plano son paralelos

3) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$ y el plano π: x – y + mz = 0

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = m^2 - 1 = 0 \rightarrow$ m = 1, m = -1

- m = 1 $\rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg A* = 2 $\rightarrow$ La recta está contenida en el plano.
- m = -1 $\rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F2]{F2=F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema incompatible $\rightarrow$ r y π paralelos
- $m \neq \pm 1 \rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto

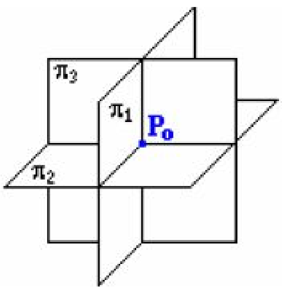
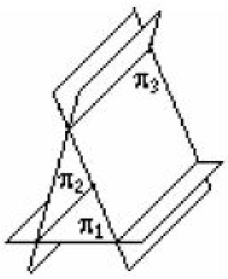
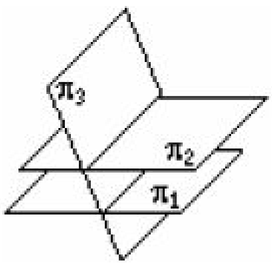
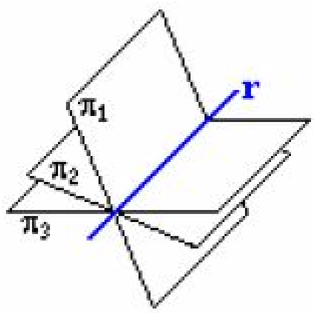
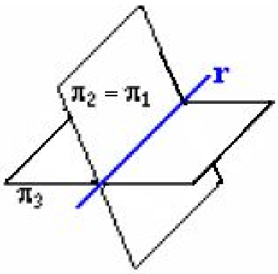
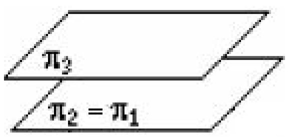
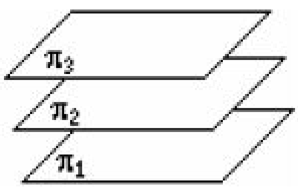
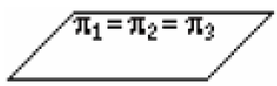
7 POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Para estudiar la posición relativa de tres planos consideramos la forma implícita:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Empleamos el teorema de Rouché –Frobenius, los casos que se pueden dar son:

- rg(A) = rg (A*) = 3 → S.C.D. → Los planos se cortan en un punto.
- rg(A) = 2 ; rg (A*) = 3 → S.C.I. → No hay punto en común:
  - Todas las submatrices de A de orden 2 x 3 tienen rango 2 → Los planos se cortan dos a dos.
  - Una de las submatrices de A de orden 2 x 3 tiene rango 1→ Dos planos son paralelos y el tercero corta a los otros dos en rectas paralelas.
- rg(A) = 2 = rg (A*) = 2 → S.C.I. → Se cortan en una recta
  - Todas las submatrices de A* de orden 2 x 4 tienen rango 2. Los planos son distintos. Por tanto, se cortan los planos en una recta.
  - Una de las submatrices de A* de orden 2 x 4 tiene rango 1. Dos planos son coincidentes y el tercero corta a los otros dos en una recta.
- rg(A) = 1 ; rg (A*) = 2 → S.I. → No existen puntos en común
  - Todas las submatrices de A* de orden 2 x 4 tienen rango 2. Los tres planos son paralelos.
  - Una de las submatrices de A* de orden 2 x 4 tiene rango 1. Dos planos son coincidentes y el tercero es paralelo a los otros dos.
- rg(A) = 1 = rg(A*) → S.C.I. → planos coincidentes

Concurrentes en un punto	Cortan 2 a 2 en una recta	2 paralelas y una secante	Secantes en una recta
			
1 corta en una recta a 2 coincidentes	2 coincidentes y 1paralelo	Planos paralelos	Planos coincidentes
			

Ejemplos

1) Estudia la posición relativa de los tres planos en cada caso:

a) $\pi_1 \equiv x + 2y - 3z = 1$ $\pi_2 \equiv 2x + y - 4z = 3$ $\pi_3 \equiv x + 5y - 5z = 1$

b) $\pi_1 \equiv 5x + z = 7$ $\pi_2 \equiv x - 2y - z = 1$ $\pi_3 \equiv 3x - 3y - 2z = 2$

a) Empleamos el teorema de Rouché –Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3+F2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A = 2 \text{ ; rg } A^* = 3 \rightarrow \text{S.I.}$$

No hay puntos comunes a los tres planos. Los planos tienen distintas direcciones 2 a 2 (sus coeficientes no son proporcionales). Por tanto, los planos se cortan 2 a 2 según tres rectas.

$$\text{b) } A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-3F1]{F2=F2-5F1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2=F2-6F3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 8 \neq 0 \rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\rightarrow$ Sistema compatible determinado

Luego, los tres planos se cortan en un punto. Determinamos las coordenadas del punto:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -8y = 8 \\ 3y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -3 + z = -1 \rightarrow z = 2 \\ x + 2 - 2 = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Las coordenadas del punto son } (1,-1,2)$$

2) Discutir la posición relativa de los siguientes planos según los distintos valores de "a":

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \rightarrow (a - 1)^2(a + 2) = 0 \rightarrow a = 1, a = -2$

- Si $a \neq 1, a \neq -2 \rightarrow$ rg(A*) = rg(A) = 3 $\rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.
- Si a = 1 $\rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Los tres planos son coincidentes
- Si a = -2 $\rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg (A*) = 3

  No hay puntos comunes a los tres planos y, además, los tres planos se cortan 2 a 2 en una recta (sus coeficientes no son proporcionales).

8 OTROS PROBLEMAS TÍPICOS

8.1. Recta que pasa por un punto y se apoya en dos rectas que se cruzan

PROBLEMA: Dada dos rectas r y s que se cruzan y un punto P exterior a ellas se pide calcular la ecuación de la recta que se apoya en r y s y pasa por P.

Ejemplos:

1) Hallar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ que pasa por el punto P(1,0,2).

a) Calcular el plano π que contiene a r y pasa por P:

Punto de r: A(0, -2, 0), $\vec{u}_r = (3,1,1) \rightarrow \overrightarrow{AP} = (1, 2, 2) \rightarrow \pi : y - z + 2 = 0$

b) Calcular el plano π' que contiene a s y pasa por P:

Punto de s: B = (-1, 0, 0), $\vec{u}_s = (6,-2,1) \rightarrow \overrightarrow{BP} = (2, 0, 2) \rightarrow \pi' : 2x + 5y - 2z = -2$

c) Determinar la recta t = $\pi \cap \pi'$: $t \equiv \begin{cases} y - z = -2 \\ 2x + 5y - 2z = -2 \end{cases}$

2) Halla las ecuaciones de la recta *r* que pasa por el punto *P*(2, 0, –1) y corta a las rectas:

$$s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad m \equiv \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

- Comprobamos que r y s se cruzan

$s \equiv A = (2, 2, -1); \vec{u} = (2, -1, 1)$; $m \equiv B = (-1, -3, 0); \vec{v} = (1, 1, 0) x (0, 1, -3) = (-3, 3, 1)$

Si z = 0 → x = -1, y = -3 → B(-1, -3, 0)

Las rectas tienen distinta dirección. Comprobamos si se cortan, sustituyendo los valores de s en m:

$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \rightarrow m \equiv \begin{cases} 2 + 2t + 2 - t + 4 = 0 \rightarrow t = -8 \\ 2 - t + 3 - 3t + 3 = 0 \rightarrow t = 2 \end{cases}$ → No hay puntos en común → s y m se cruzan.

- Determinamos la recta r como intersección de los planos α y β:

Plano α: Plano que contiene a s y pasa por P

$\alpha \equiv P + \langle \vec{u} \rangle + \langle \overrightarrow{AP} \rangle$, siendo $\overrightarrow{AP}$ = (0, -2, 0) || (0, 1, 0) → $\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\alpha \equiv (x - 2) - 2(z + 1) = 0 \rightarrow \alpha \equiv x - 2z - 4 = 0$

Plano β: Plano que contiene a m y pasa por P

$\beta \equiv P + \langle \vec{v} \rangle + \langle \overrightarrow{BP} \rangle$, siendo $\overrightarrow{BP}$ = (3, 3, -1) → $\beta \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\beta \equiv -6(x - 2) - 18(z + 1) = 0 \rightarrow \beta \equiv x + 3z + 1 = 0$

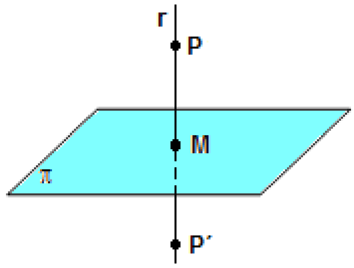
La recta r es: $m \equiv \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

8.2. Punto simétrico respecto a un plano (Proyección ortogonal de un punto sobre un plano)

PROBLEMA: Dado un punto P y un plano π calcular el punto P´ simétrico de P respecto del plano π.

Ejemplo: Halla el punto simétrico de *P*(2, 1, 0) respecto del plano $\pi: 2x - y + z = 0$

1º) Calcular la recta r que contiene al punto P y es perpendicular a π.



$$\vec{n} = \vec{u}_r = (2, -1, 1) \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

(se aconseja determinar la ecuación paramétrica)

2º) Hallamos el punto M (proyección ortogonal de P sobre π). Para determinar el punto de intersección de r con π, sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano.

$$2(2 + 2t) - (1 - t) + t = 3 \rightarrow t = -\frac{1}{2} \rightarrow M\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

3º) Imponemos que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$: $\left(\frac{x'+2}{2}, \frac{y'+1}{2}, \frac{z'}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow P' = (0, 2, -1)$

8.3. Punto simétrico respecto a una recta (Proyección ortogonal de un punto sobre una recta)

PROBLEMA: Dado un punto P y una recta r calcular el punto P´ simétrico de P respecto de recta r.

Ejemplo: Dado un punto P(2, 1, 4) hallar su simétrico con respecto a la recta: $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

1º) Hallamos el plano π que contiene al punto *P* y es perpendicular a *r*:

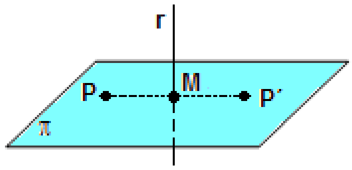
$\vec{n} = \vec{u}_r = (3, 2, -1) \rightarrow \pi: 3(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 4) = 0 \rightarrow \pi: 3x + 2y - z - 4 = 0$

2º) Determinamos el punto M (proyección ortogonal de P sobre r), que es el punto de intersección r con π:

Sustituyendo los valores de r en la ecuación del plano:

$3(1+ 3t) + 2(2t) - (-1- t) - 4 = 0 \rightarrow t = 0$

Dando el valor t = 0 en la ecuación de r: M(1, 0, -1)



3º) Imponemos que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$: $\left(\frac{x'+2}{2}, \frac{y'+1}{2}, \frac{z'+4}{2}\right) = (1, 0, -1) \rightarrow A'(0, -1, -6)$

CONSEJOS PARA REALIZAR LOS PROBLEMAS

1) Antes de empezar a realizar operaciones hay que imaginar la situación (con dibujos, usando bolígrafos que representen rectas y folio que representen planos).

- Si nos piden una recta, se necesita un punto de la recta y un vector director.
- Si nos piden un plano: en función de los datos del problema decidimos entre estas dos opciones:
  - Un punto del plano y un vector normal.
  - Un punto del plano y dos vectores de dirección.

2) Se puede simplificar las coordenadas de un vector o reducir a denominador común las coordenadas para suprimir denominadores si **<u>sólo</u>** nos interesa la dirección del mismo. Nunca se puede realizar esto con coordenadas de un punto.

EJERCICIOS

1. Puntos

1.1. Halla un punto *C* en el segmento *AB*, sabiendo que *A*(−1, 4, 3) y *B*(2, 10, −6), de modo que $\overline{AC}$ sea la mitad que $\overline{CB}$.

1.2. Determina los cuatro puntos que dividen el segmento de extremos *A*(2, −6, 3) y *B*(12, −1, 8) en cinco partes iguales.

1.3. Comprueba si están alineados los siguientes puntos en el espacio.

a) *A*(3, 3, −5), *B*(4, −6, 1) y *C*(2, −4, 5) b) *A*(−4, 1, 2), *B*(0, 6, 1) y *C*(−12, −9, 4)

1.4. Decide si los siguientes cuartetos de puntos están en el mismo plano o no.

a) *A*(0, 1, 2), *B*(2, 2, 1), *C*(1, 0, 5) y *D*(1, 3, −2) b) *A*(0, 0, −1), *B*(1, 0, −2), *C*(0, 1, −2) y *D*(4, 1, 5)

1.5. Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados:

P(2, −1, *a*), *Q*(5, 1, 6) y *R*(*b*, −5, 9).

Solución: a = 7, b = -4

1.6. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son *A*(3, 1, 0), *B*(4, 5, 2) y *C*(4, 7, −2).

a) Halla el cuarto vértice del paralelogramo.

b) Calcula su perímetro.

Solución: D = (3, 3, -4) ; p = $2\left(\sqrt{20}+\sqrt{21}\right)$

2. Ecuación de rectas

2.1. Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto y tiene el vector director indicado.

a) *A*(2, −1, −1) y $\vec{u}$ = (−2, −4, 4) b) *A*(1, 1, 1) y $\vec{u}$ = (−2, −2, −2)

2.2. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, sabiendo que un punto y un vector director son:

a) *A*(3, 0, −7) y $\vec{u}$ = (−10, 2, 6) b) *A*(0, 0, 0) y $\vec{u}$ = (1, 0, 0)

2.3. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) *A*(2, −1, −1) y *B*(0, −5, 3) b) *A*(1, 1, 1) y *B*(−1, −1, −1)

2.4. Halla las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) A(3, 0, −7) y B(−7, 2, −1) b) A(0, 0, 0) y B(1, 0, 0)

2.5. Expresa en la forma indicada la ecuación de las rectas cuyas ecuaciones implícitas son:

a) $r \equiv \begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$ en forma paramétrica b) $s \equiv \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$ en forma continua

2.6. Pasa a forma implícita la ecuación de la recta:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

2.7. Prueba que las ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+5z=9 \end{cases}$ y $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan la misma recta.

2.8. Sean *P* y *Q* los puntos del espacio *P*(1, 2, 2) y Q(2, *a*, *a*).

a) Hallar el valor de *a* para que la recta que une *P* y *Q* pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar la ecuación de la recta como intersección de dos planos y en forma paramétrica.

3. Ecuación de planos

3.1. Halla las ecuaciones paramétricas del plano correspondiente.

a) A=(3,0,-7) $\vec{u}=(-10,2,6)$ $\vec{v}=(0,3,10)$ b) A = (0,0,0)$\vec{u}=(1,0,0)$ $\vec{v}=(4,4,4)$

3.2.a) Escribe en forma implícita la ecuación del plano:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda+3\mu \\ y=3+2\lambda+4\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

b) Escribe en forma paramétrica las ecuaciones del plano 2 $x - y + 4z = 7$

3.3. Obtener en cada caso:

a) La ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, -7)$, $B(5, -2, 9)$ y $C(5, -4, 0)$.

b) Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos: P(3,−1,5), Q(1,2,3) y R(9,−2, −2)

3.4. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$.

a) Con $a = 2$, calcula b para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$. ¿cuál es la ecuación de dicho plano?

b) Calcula los valores de a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

3.5. Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r:

a) $P(-1, 0, 2)$; $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{3}$ b) $P(4, 0, -1)$; $r \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$

3.6. Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto P (8, 9, 1) y es paralelo a las rectas:

$$s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

3.7. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es paralela a la recta *s*

$$r \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y-z+4=0 \\ 2x-3y+2z+4=0 \end{cases}$$

3.8. Se consideran la recta r: $(x,y,z) = (t+1, 2t, 3t)$, el plano π: $x - 2y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

4. Posiciones relativas

4.1. Determina la posición de las siguientes rectas y, en caso de ser secantes, determina el punto de corte.

a) $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-5+t \\ z=3+t \end{cases}$; $s \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$ b) $r \equiv \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

c) $r \equiv \begin{cases} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{cases}$ d) $r \equiv \begin{cases} x=-4+7t \\ y=2t \\ z=-1 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x=1-k \\ y=10+4k \\ z=3+2k \end{cases}$

4.2. Determina la posición de la recta y el plano:

a) $\pi \equiv 2x-5y+3z+3=0$; $r \equiv x=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ b) $\pi \equiv x+z+1=0$; $r \equiv \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{cases}$

4.3. Determina la posición de los dos planos:

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv -x+2y-z=0 \\ \pi_2 \equiv x-2y+z+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-z+11=0 \\ \pi_2 \equiv -2y-z+11=0 \end{cases}$

4.4. Estudia la posición relativa de los tres planos en cada uno de los siguientes casos:

a) $\begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ 3y+2z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x-y+z-2=0 \\ 3x-y+z-4=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+y-2z=0 \\ 2x+2y-3z=-4 \end{cases}$

4.5. Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$$

4.6. Di si las dos rectas son paralelas. En caso afirmativo, calcular la educación del plano que las contiene:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-z=13 \\ 2x-y-7z=16 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases}$$

4.7. Calcula el valor que debe tomar *m* para que las siguientes rectas se corten en un punto.

$$r \equiv \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{0} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 6+4t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

4.8. Sean las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$. Hallar k si r y s se cortan en un punto.

4.9. Dados los planos $\pi_1 \equiv mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ calcula *m* para que sean:

a) Paralelos b) Perpendiculares

4.10. Estudia las posiciones relativas del plano π: $x + ay - z = 1$ y de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$ según los valores de a.

5. Ecuación de rectas y planos

5.1. Halla los puntos en que corta a los ejes coordenados el plano **π**: $2x - 3y + 5z - 30 = 0$.

5.2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano **π** con la recta s y es paralela a r:

$$\pi: x+y-z+6=0 \qquad s \equiv \frac{x}{3} = y-2 = z+1 \qquad r \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

5.3. Dadas las rectas:

$$r \equiv x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \quad s \equiv x-1 = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

y el punto *P*(1, 1, −1), queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por *P* y que corta a *r* y a *s*. Para conseguirlo:

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana del plano **π** que contiene a la recta *r* y al punto *P*.

b) Encuentra el punto *M* calculando el punto de intersección del plano **π** con la recta *s*.

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *M*.

d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

5.4. Calcule la ecuación de la recta paralela a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y-z=0\\2x-y+z=1\end{cases}$ que pasa por el punto (0, 1, 0).

5.5. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(−2, −1, −4) y se apoya en las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=4+t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}2x-y+z+4=0\\-7y+5z+10=0\end{cases}$$

5.6. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto *P*(1, 0, 0) y corta a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+2y+z-1=0\\3x+y-4=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$$

5.7. Dados los puntos A(-2,-4,-3) y B(2,6,5) y la recta $r\equiv\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y-3z=2\end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar tu respuesta.

5.8. Considera las rectas siguientes: $r\equiv\frac{x-1}{2}=y=z-2$; $s\equiv\begin{cases}x-2z=5\\x-2y=11\end{cases}$

a) Comprueba que *r* y *s* son paralelas.

b) Halla la ecuación implícita del plano que contiene a *r* y a *s*.

5.9. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y-1=0\\2x-y+z=0\end{cases}$ y es paralelo a $s\equiv\frac{1-x}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-4}$

5.10. Considere los planos: π_1: $2x-y+z=0$ y π_2: $z-3=0$

a) Estudie la posición relativa de π_1 y π_2

b) Encuentre, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto (2, 2,-1).

5.11. Se consideran los puntos en el espacio: A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,3,0).

a) Halle la ecuación general o implícita del plano π que contiene a esos puntos.

b) Calcule la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas y encuentre el punto de intersección de la recta y el plano.

5.12. El punto M(1,-1,0) es el centro de un paralelogramo y A(2,1,-1) y B(0,-2,3) son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

5.13. Los puntos P(2,0,0) y Q(-1,12,4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación:

$$r:\begin{cases}4x+3z=33\\y=0\end{cases}$$

a) Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

5.14. Dado un punto A(1, 2, 0) hallar su simétrico con respecto a la recta: $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{2}$

5.15. Dado un punto A(1, 0, 4) hallar su simétrico respecto del plano π: $4x-2y-3z-3=0$

5.16. Se consideran los puntos *A*(2;–1; 1) y *B*(–2; 3; 1).

a) Halle los puntos *C* y *D* que dividen al segmento *AB* en tres partes de igual longitud.

b) Halle el plano respecto al cual los puntos *A* y *B* son simétricos.