

8 Límites de sucesiones y de funciones

Propuesta A

- Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:
 - $4, 7, 10, 13, 16, \dots$
 - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots$
 - $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
 - $2, 5, 10, 17, 26, \dots$
- Dada la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$:
 - Calcula sus cinco primeros términos.
 - Halla su término general.
 - Sabiendo que es convergente, calcula su límite.
 - ¿Está acotada? Si es así, da una cota inferior y una superior.
- Dada la sucesión de término general $a_n = 3 + \frac{2}{n}$:
 - Calcula sus tres primeros términos y halla el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{28}{9}$.
 - Demuestra que es estrictamente decreciente.
 - Calcula su límite y averigua a partir de qué término los siguientes términos se aproximan a 3 con un error menor que $\varepsilon = 0,001$.
- Calcula los siguientes límites:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n+1} - \frac{n^2 + 2n}{n-1} \right)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 4n + 1}{1+3n}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n} \right)$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1} \right)^{n+2}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$
- Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?
 - $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$
 - $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$
- Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:
 - $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 31)$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (x-5)(4-x^2)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 100x - 2009)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)(4+x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 7)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x^2 + 10)$
- Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4}$
- Se considera la función: $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$, calcula $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calcula los siguientes límites de funciones racionales:
 - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x^3+4x}{x^4-16}$

Propuesta B

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, -2, ... b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$ c) 1, 8, 27, 64, 125, ... d) 0, 7, 26, 63, 124, ...

2. Se considera la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$.

- a) Calcula sus cinco primeros términos.
 b) Halla su término general.
 c) Si $b_n = |a_n|$ y $c_n = -|a_n|$, demuestra que b_n y c_n son progresiones geométricas. ¿Lo es también a_n ?
 d) Estudia la monotonía de a_n .
 e) Halla, si existen, cotas superiores e inferiores para a_n .
 f) Calcula el límite de a_n .

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2} \right)$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1} \right)$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2} \right)$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 2)$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + x - 3)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x^2)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los límites laterales de las funciones racionales en los puntos en que no están definidas:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ c) $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Se considera la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$. Calcula $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soluciones propuesta A

1. a) $a_6 = 19, a_7 = 33, a_8 = 25, a_n = 3n + 1$
 b) $a_6 = \frac{11}{12}, a_7 = \frac{13}{14}, a_8 = \frac{15}{16}, a_n = \frac{2n-1}{2n}$
 c) $a_6 = 36, a_7 = 49, a_8 = 64, a_n = n^2$
 d) $a_6 = 37, a_7 = 50, a_8 = 65, a_n = n^2 + 1$

2. a) $a_0 = 2, a_1 = 2^{\frac{1}{2}}, a_2 = 2^{\frac{1}{4}},$
 $a_3 = 2^{\frac{1}{8}}, a_4 = 2^{\frac{1}{16}}, a_5 = 2^{\frac{1}{32}}$
 b) $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = k \Rightarrow \log_2 k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow k = 1$

El límite de la sucesión es 1.

- d) Está acotada superiormente por $a_0 = 2$ e inferiormente por su límite, 1.

3. a) $a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = \frac{11}{3}$
 $3 + \frac{2}{s} = \frac{28}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{s} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow s = 18$
 b) $a_{n+1} - a_n = \left(3 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \frac{-2}{(n+1)n} < 0$

La sucesión es estrictamente decreciente.

- c) $\lim a_n = \lim \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 3$
 $|a_n - 3| < \varepsilon; \left|3 + \frac{2}{n} - 3\right| < 0,001 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < 0,001$
 $2 < 0,001n \Rightarrow n > 2000$. A partir de a_{2000} .

4. a) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 4n}{n^2 - 1} = -2$
 b) $l = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$
 c) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{3n} = -\infty$
 d) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$
 e) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$
 f) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n^2} = \frac{1}{4}$

5. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(x-3)}{x(x-1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x-1} = 3$

6. a) -1
 b) -20
 c) $+\infty$
 d) $-\infty$
 e) $-\infty$
 f) $+\infty$

7. Estos límites son del tipo $\frac{0}{0}$:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{12+x}+4)}{x-4(\sqrt{12+x}-4)(\sqrt{12+x}+4)(\sqrt{x}+2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{12+x}+4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{12+x}+4)}{(\sqrt{x}+2)} = 2$

8. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x-1}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{+x-1}\right) = 1$$

9. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3-x^2-2x)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{0}{32} = 0$

Soluciones propuesta B

1. a) $a_6 = -5$, $a_7 = -8$, $a_8 = -11$, $a_n = 13 - 3n$
 b) $a_6 = \frac{12}{13}$, $a_7 = \frac{14}{15}$, $a_8 = \frac{16}{17}$, $a_n = \frac{2n}{2n+1}$
 c) $a_6 = 216$, $a_7 = 343$, $a_8 = 512$, $a_n = n^3$
 d) $a_6 = 215$, $a_7 = 342$, $a_8 = 511$, $a_n = n^3 - 1$

2. a) $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2}$, $a_3 = -\frac{1}{3^3}$,

$$a_4 = \frac{1}{3^4}, a_5 = -\frac{1}{3^5}$$

b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$

c) $b_n = \frac{1}{3^n}$, $c_n = -\frac{1}{3^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-\frac{1}{3^{n+1}}}{-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{1}{3^n}} = -\frac{1}{3}$$

b_n y c_n son progresiones geométricas de

razón $r = \frac{1}{3}$. a_n es una progresión

geométrica de razón $r = -\frac{1}{3}$.

- d) Como se puede ver en los primeros términos, a_n es oscilante.

- e) Superior: $a_0 = 1$. Inferior: $a_1 = -\frac{1}{3}$.

- f) $c_n \leq a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3^n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

3. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2-n+1}{n^2-3n+2}\right) = -1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+8n^2}{5n^3+5n^2} = \frac{2}{5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = +\infty$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{5n-3}\right) \left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)} = (e^{+\infty}) = +\infty$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+2n}{2}n}{n^2+1} = 1$

4. a) 4 b) -3 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

5. Todos estos límites son del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Simplificando por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

b) Simplificando por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

6. a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x-3}{x+3}\right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3+3)}{x(x-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

7. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{(\sqrt{x^2-4}+x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

8. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{-1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{-1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty$$