

Prueba inicial (Análisis matemático)

Nombre:

Apellidos:

Curso:

Grupo:

Fecha:

1. La arista de la base de un prisma recto de base cuadrada mide x cm y las aristas laterales son el triple de las aristas de la base.
- Escribe la función que permite calcular el área lateral del prisma cuando se conoce x .
 - Escribe la función que determina el área total del prisma.
 - Expresa el volumen del prisma en función de x .
 - Calcula el área lateral, total y volumen del prisma (con las condiciones anteriores) si la arista de la base mide 5 cm.

2. Se considera la función de variable natural $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$. Calcula los siguientes valores:
- $f(56)$
 - $f(101)$
 - $(f \circ f \circ f)(422)$
 - $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$ si $50 \leq x \leq 128$

3. Calcula el dominio de las funciones de variable real:

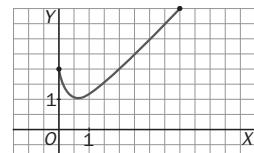
a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $g(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$ c) $h(x) = \sqrt{8 - 3x}$ d) $k(x) = \sqrt{\sin(x)}$

4. Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \frac{3}{x+4}$ y $h(x) = \sqrt{x}$. Efectúa las siguientes operaciones con ellas:

- $(f + g)(-1)$
- $(f \circ g)(2)$
- $(h \circ f)(3)$
- $(g \cdot f)(x)$
- $(f \circ h)(x)$
- $(h \cdot f)(4)$
- $(g \circ h)(9)$
- $(f + g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$

5. La gráfica representada corresponde a una función $f(x)$. ¿Cuál es su dominio? ¿Qué recorrido tiene? Representa, razonadamente, las gráficas de las funciones:

- $-f(x)$
- $2 \cdot f(x)$
- $2 + f(x)$
- $f(x + 2)$
- $f(-x)$



6. Los cortes con los ejes de una función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ son $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(0, 3)$. Halla sus coeficientes y determina las coordenadas del vértice.

7. Se considera la función $f(x) = x^2$. Calcula:

- $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$
- $\frac{f(1,4) - f(1)}{1,4 - 1}$
- $\frac{f(1,02) - f(1)}{1,02 - 1}$
- $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1}$

8. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ |x| & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x+4 & \text{si } 2 < x \leq 6 \end{cases}$ e indica su dominio, recorrido, máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

9. Justifica si las siguientes parejas de funciones son iguales o no:

- $f(x) = \sqrt{x^2}$ y $g(x) = x$
- $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = (x+1)(x-2)$
- $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$ y $g(x) = \log(x+3) - \log(2-x)$
- $f(x) = \sqrt{\frac{-2x-10}{x-2}}$ y $g(x) = \frac{\sqrt{-2x-10}}{\sqrt{x-2}}$

10. Determina los siguientes límites de sucesiones:

- $\lim \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n$
- $\lim \left(\frac{1+2n}{2+3n} \right)^{n-1}$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
- $\lim \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n$

11. Halla los siguientes límites de funciones:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)$

12. Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - 5x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua.

Soluciones

1. a) $A_L(x) = 4 \cdot (x \cdot 3x) = 12x^2 \text{ cm}^2$ c) $V(x) = x^2 \cdot 3x = 3x^3 \text{ cm}^3$
 b) $A_T(x) = 2x^2 + 12x^2 + 14x^2 \text{ cm}^2$ d) $A_L(5) = 12 \cdot 5^2 = 300 \text{ cm}^2, A_T(5) = 14 \cdot 5^2 = 350 \text{ cm}^2, V(5) = 3 \cdot 5^3 = 375 \text{ cm}^3$

2. a) $f(56) = \frac{56}{2} = 28$ b) $f(101) = \frac{101+1}{2} = 51$ c) $(f \circ f \circ f)(422) = f(f(f(422))) = f(f(211)) = f(106) = 53$

d) La función f es no creciente, luego el mayor valor se obtiene para $x = 128$ y el menor para $x = 50$. Se calcula:

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(128) = f(f(f(f(f(f(f(128))))))) = f(f(f(f(f(f(64)))))) = \dots = f(f(4)) = f(2) = 1$$

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(50) = f(f(f(f(f(f(f(50))))))) = f(f(f(f(f(f(25)))))) = f(f(f(f(f(13)))))) = \dots = f(f(2)) = f(1) = 1$$

Luego la función es $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = 1$ constantemente en $50 \leq x \leq 128$.

3. a) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$c) D(h) = \{x \in \mathbb{R} / 8 - 3x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{8}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$$

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ d) $D(k) = \{x \in \mathbb{R} / \sin x \geq 0\} = [2k\pi, (2k+1)\pi] \forall k \in \mathbb{Z}$

4. a) $(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-3) + 1 = -2$ f) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 4) + \frac{3}{x+4} = \frac{x^3 + 4x^2 - 4x - 13}{x+4}$

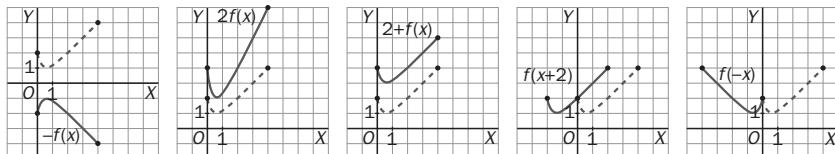
b) $(h \cdot f)(4) = h(4) \cdot f(4) = 2 \cdot 12 = 24$ g) $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x+4}$

c) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$ h) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \frac{3}{x^2}$

d) $(g \circ h)(9) = g(h(9)) = g(3) = \frac{3}{7}$ i) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x}) = x - 4$

e) $(h \circ f)(3) = \sqrt{5}$

5. Dominio: $D = [0, 4]$. Recorrido: $R = [1, 4]$.



6. Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 5 \Rightarrow f(x) = a(x-1)(x-5)$. Pasa por $(0, 3) \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$. Por tanto, $f(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + 3$

7. a) 4 b) 2,4 c) 2,02 d) $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = 2 + h$ e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$

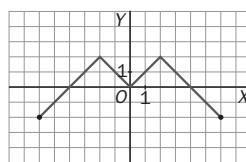
8. Dominio: $D = [-6, 4]$. Recorrido: $R = [-2, 2]$.

Máx. relativos: $M_1(-2, 2)$ y $M_2(2, 2)$.

Mín. relativos: $m_1(-6, -2)$, $m_2(0, 0)$ y $m_3(6, -2)$.

Crecimiento: $(-6, -2) \cup (0, 2)$.

Decrecimiento: $(-2, 0) \cup (2, 6)$.



9. a) $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x) = x$ c) $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{2-x}\right) = g(x) = \log(x+3) - \log(2-x)$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 = g(x) = (x+1)(x-2)$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x-10}{x-2}} \neq g(x) = \frac{\sqrt{-2x-10}}{\sqrt{x-2}}$ pues $D(f) = [-5, 2] \neq D(g) = \emptyset$.

10. a) $+\infty$ b) 0, porque $0 < \frac{2}{3} < 1$ c) e d) \sqrt{e}

11. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

12. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(x) \Rightarrow 8 = k - 10 \Rightarrow k = 18$