1. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$, determina:

a) Un punto y el vector director de cada una.

b) El ángulo que forman.

c) El punto de corte de cada una de las rectas con el plano *XY*.

d) La distancia entre las dos rectas.

2. Sean el plano $\pi: x-y+z+4=0$ y la recta $r: (2-t,\ 3t,\ -1+2t)$. Determina:

a) Su posición relativa.

b) El ángulo que forma la recta con el plano.

c) La ecuación de la recta r' que se obtiene al proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano.

d) El ángulo que forma la recta *r* con su proyección r'.

e) La ecuación de otra recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y está contenida en el plano π.

3. Los puntos *A*(0, 0, 3), *B*(2, −3, 0), *C*(−5, 2, 1) y *D*(0, 7, −2) son los vértices de un tetraedro, calcula:

a) La longitud de las aristas *AB* y *CD*.

b) El área de la cara *BCD*.

c) La altura del tetraedro sobre la cara *BCD*.

d) La medida del diedro que determinan las caras *ABC* y *ABD*.

e) El volumen del tetraedro.

4. Se considera la recta $r: \begin{cases} x-2y=1 \\ 3y+z=-2 \end{cases}$ y el punto *P*(4, 4, 6). Halla:

a) El punto de la recta más cercano a *P*.

b) La distancia del punto *P* a la recta *r*.

c) La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*.

5. Los puntos *A*(0, 3, −1) y *B*(−1, 0, 5) son vértices de un triángulo de área $S = \sqrt{235}$. El tercer vértice *C* pertenece a la recta de ecuación $r: \frac{x-1}{0} = y+3 = \frac{z+2}{-1}$. Determina:

a) Las coordenadas del vértice *C*.

b) Las coordenadas de otro punto $P \in r$ de manera que el triángulo *APB* sea rectángulo en *A*.

c) El área del triángulo *APB*.

6. Dados el punto *P*(−3, 1, 0) y la recta $r: (1+3t,\ -1+t,\ -2)$, determina:

a) La ecuación del plano que los contiene.

b) La distancia del punto a la recta.

c) Las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

1. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(0,1,-3)\\ \vec{u}=(2,0,-1)\end{cases}$, $s(B,\vec{v}):\begin{cases}B(9,-5,0)\\ \vec{v}=(-3,2,1)\end{cases}$

b) $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{7}{\sqrt{70}}\Rightarrow\alpha=33^\circ 12'39''$

c) El plano *XY* tiene ecuación *z* = 0, por lo que $r\cap XY=P(-6,1,0)$, $s\cap XY=B(9,-5,0)$.

d) $d(r,s)=\dfrac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$, $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,4)\\ \overrightarrow{AB}=(9,-6,3)\end{cases}$

$d(r,s)=\dfrac{|18-6+12|}{\sqrt{4+1+16}}=\dfrac{24}{\sqrt{21}}$ u

2. El plano está determinado por un punto, *A*, y su vector normal. $\pi(A,\vec{w}):\begin{cases}A(0,4,0)\\ \vec{w}=(1,-1,1)\end{cases}$

La recta es $r(B,\vec{v}):\begin{cases}B(2,0,-1)\\ \vec{v}=(-1,3,2)\end{cases}$

a) Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=-1-3+2\neq 0$, la recta y el plano no son paralelos; luego se cortan.

b) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{14}\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=17^\circ 58'31''$

c) Se halla el plano $\sigma:\begin{cases}r\subset\sigma\\ \pi\perp\sigma\end{cases}\Rightarrow\sigma(B,\vec{v},\vec{w})$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & x-2\\ 3 & -1 & y\\ 2 & 1 & z+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\sigma:5x+3y-2z=12$$

$$r'=\pi\cap\sigma=\begin{cases}x-y+z+4=0\\ 5x+3y-2z-12=0\end{cases}=\begin{cases}x=\lambda\\ y=4-7\lambda\\ z=-8\lambda\end{cases}$$

d) $\alpha=\arccos\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\dfrac{38}{\sqrt{1596}}=17^\circ 58'31''$

e) Si $P=r\cap\pi=P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{2},4\right)$, entonces la recta es $s(P,\vec{v}\times\vec{w})$. Como $\vec{v}\times\vec{w}=(5,3,-2)$,
$s:\left(x=-\dfrac{1}{2}+5t,\ y=\dfrac{15}{2}+3t,\ z=4-2t\right)$

3. a) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{22}$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{59}$

b) $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{20^2+16^2+60^2}=2\sqrt{266}$

c) Se halla:

$\pi_{BCD}(B,\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}):5x+4y+15z+2=0$

$h=d(A,\pi_{BCD})=\dfrac{|45+2|}{\sqrt{25+16+225}}=\dfrac{47}{\sqrt{266}}$ u

d) Se hallan $\overrightarrow{AB}=(2,-3,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-5,2,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,7,-5)$, $\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,19,-11)$, $\vec{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(36,10,14)$

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{468}{\sqrt{996592}}\Rightarrow\alpha=62^\circ 2'37''$

e) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\dfrac{1}{3}S_{BCD}\cdot h=\dfrac{94}{3}$ u^3

4. a) $r:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'(1+2t,t,-2-3t)\\ \vec{u}=(2,1,-3)\end{cases}$

$\overrightarrow{PP'}=(-3+2t,t-4,-8-3t)$, y como $\overrightarrow{PP'}\perp\vec{u}$,

$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow 14t+14=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow P'(-1,-1,1)$

b) $d(P,r)=|\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$ u

c) $s:\begin{cases}x=4+5t\\ y=4+5t\\ z=6+5t\end{cases}$, o también $s:\begin{cases}x=-1+t\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{cases}$

5. a) $r:\begin{cases}x=1\\ y=-3+t\\ z=-2-t\end{cases}\Rightarrow C(1,-3+t,-2-t)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,6)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-6+t,-1-t)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(39-3t,5-t,9-t)$

$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{235}\Rightarrow 11t^2-262t+687=0$

Una solución es $t=3$, de donde *C*(1, 0, −5).

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Rightarrow t=\dfrac{11}{9}\Rightarrow P\left(1,-\dfrac{16}{9},-\dfrac{20}{9}\right)$

c) $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}|=\dfrac{\sqrt{91430}}{18}\approx 16{,}8$ u^2

6. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(1,-1,-2)\\ \vec{u}=(3,1,0)\end{cases}\Rightarrow\pi\left(P,\vec{u},\overrightarrow{AP}\right)$

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & x+3\\ 1 & 2 & y-1\\ 0 & 2 & z\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3y+5z+6=0$$

b) $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=(2,-6,10)$, $d(P,r)=\dfrac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}=\sqrt{14}$ u

c) Se halla la proyección de *P* sobre la recta.

$M(1+3t,-1+t,-2)$, $\overrightarrow{PM}=(4+3t,-2+t,-2)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PM}=0\Rightarrow 10t=-10\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(-2,-2,-2)$

Luego $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}\Rightarrow P'(-1,-5,-4)$